به نام خدا

حل آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱، نیمسال اول ۹۸-۹۷

---

۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی با ضابطه‌ی $f(x)=۳x+\sin^۲(x+\frac{۲\pi}{۳})$ باشد.

الف) نشان دهید f بر $\mathbb{R}$ تابعی وارون‌پذیر و تابع وارون بر دامنه‌ی تعریف خود مشتق‌پذیر است.

ب) مطلوبست محاسبه $(f^{-۱})'(\pi)$.

حل. الف) برای اثبات وارون‌پذیری f نشان می‌دهیم f تابعی اکیدا یکنوا و در نتیجه یک به یک است.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\qquad f'(x) &= ۳+۲\sin(x+\frac{۲\pi}{۳})\cos(x+\frac{۲\pi}{۳})\\ &= ۳+\sin(۲x+\frac{۴\pi}{۳})\geq ۲>۰\end{aligned}$$

در نتیجه f بر $\mathbb{R}$ اکیدا صعودی و در نتیجه یک به یک و بنابر این وارون‌پذیر است. در عین حال چون برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)$ اکیدا مثبت و در نتیجه غیر صفر است، بنابر قضیه مشتق تابع وارون، $f^{-۱}$ نیز بر دامنه تعریف خود مشتق‌پذیر است. (۱۰ نمزه)

ب) برای محاسبه مشتق تابع وارون در نقطه $b=\pi$، ابتدا توجه می‌کنیم اگر $a=\frac{\pi}{۳}$ آنگاه

$$f(a)=f(\frac{\pi}{۳})=۳\frac{\pi}{۳}+\sin^۲(\frac{\pi}{۳}+\frac{۲\pi}{۳})=\pi=b$$

در نتیجه بنابر قضیه مشتق تابع وارون،

$$(f^{-۱})'(\pi)=(f^{-۱})'(b)=\frac{۱}{f'(a)}=\frac{۱}{f'(\frac{\pi}{۳})}=\frac{۱}{۳+\sin(۲\frac{\pi}{۳}+\frac{۴\pi}{۳})}=\frac{۱}{۳}$$

(۱۰ نمره)

۲. فرض کنید f و g بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشند. اگر برای هر $x \in (a,b)$، $f'(x) \leq g'(x)$ و $f(a) = g(a)$، نشان دهید $f(b) \leq g(b)$.

حل. اگر $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابع با ضابطه $h(x) = f(x) - g(x)$ باشد آنگاه بنابر مفروضات مسئله، h بر $[a,b]$ تابعی پیوسته و بر (a,b) تابعی مشتق‌پذیر است. همچنین

$$\forall x \in (a,b), \qquad h'(x) = f'(x) - g'(x) \leq 0$$

در نتیجه h بر $[a,b]$ تابعی نزولی است. با توجه به اینکه $b > a$ خواهیم داشت $h(b) \leq h(a) = f(a) - g(a) = 0$. در نتیجه $f(b) - g(b) = h(b) \leq 0$ و از آنجا $f(b) \leq g(b)$. **(۲۰ نمره)**

---

۳. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \int_1^x \frac{t}{1+t^6}\, dt$ مفروض است.

الف) نشان دهید f دارای دقیقاً یک مقدار می‌نیمم مطلق بر $\mathbb{R}$ است. مثبت یا منفی بودن این مقدار می‌نیمم را تعیین کنید.

ب) نشان دهید برای هر $x \geq 1$،

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2) - \frac{\pi}{8}$$

حل. الف) با استفاده از قضیه اساسی اول، برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) = \frac{x}{1+x^6}$. در نتیجه $x = 0$ تنها نقطه بحرانی f بر $\mathbb{R}$ است. با توجه به پیوستگی f بر $\mathbb{R}$ و در نتیجه بر هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $[0, \infty)$ خواهیم داشت

$$\forall x \in (-\infty, 0), \quad f'(x) = \frac{x}{1+x^6} < 0 \Rightarrow \text{اکیدا نزولی است } (-\infty,0] \text{ بر } f$$
$$\forall x \in (0, \infty), \quad f'(x) = \frac{x}{1+x^6} > 0 \Rightarrow \text{اکیدا صعودی است } [0,\infty) \text{ بر } f$$

در نتیجه برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \qquad \text{و} \qquad x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$$

در نتیجه $f(0)$ می‌نیمم مطلق f بر $\mathbb{R}$ است. از آنجا که $x=0$ تنها نقطه بحرانی f بر $\mathbb{R}$ است، f اکسترمم دیگری بر $\mathbb{R}$ ندارد. اکنون برای تعیین علامت $f(0) = \int_1^0 \frac{t}{1+t^6}dt = -\int_0^1 \frac{t}{1+t^6}dt$،

$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{t}{1+t^6} \geq \frac{t}{1+1} = \frac{1}{2}t \;\Rightarrow\; \int_0^1 \frac{t}{1+t^6}dt \geq \int_0^1 \frac{1}{2}t\,dt = \frac{1}{4}$$

در نتیجه $f(0) = -\int_0^1 \frac{t}{1+t^6}dt \leq -\frac{1}{4} < 0$. **(۱۵ نمره)**

ب) تابع کمکی $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)$ را بر بازه $[1,\infty)$ در نظر می‌گیریم. g بر این بازه پیوسته و بر $(1,\infty)$ مشتق‌پذیر است. داریم

$$\forall x \in (1,\infty), \quad g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{x}{1+x^6} - \frac{x}{1+x^4} < 0$$

پس g بر $[1,\infty)$ تابعی اکیدا نزولی بوده، در نتیجه برای هر $x \geq 1$ خواهیم داشت $g(x) \leq g(1)$. اما

$$g(1) = f(1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(1^2) = \int_1^1 \frac{t}{1+t^6}dt - \frac{\pi}{8} = 0 - \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{8}$$

و در نتیجه برای هر $x \geq 1$، $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2) \leq -\frac{\pi}{8}$ که از آن نامساوی

$$f(x) \leq \frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2) - \frac{\pi}{8}$$

به دست می‌آید. از طرف دیگر،

$$\forall x \in (1,\infty), \quad f'(x) = \frac{x}{1+x^6} > 0$$

پس f بر بازه $[1,\infty)$ اکیدا صعودی بوده، در نتیجه برای $x \geq 1$، $f(x) \geq f(1) = 0$. **(۱۵ نمره)**

۴. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{1}^{e} (\ln x)^{2}\, dx$ ب) $\int \frac{dx}{(e^x-1)^2}$ ج) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

حل. الف) (۱۰ نمره) با استفاده از روش جزبه جز، اگر قرار دهیم $u=(\ln x)^2$ و $dv=dx$ آنگاه $du = 2\ln x\ \frac{1}{x}dx$ و $v=x$. در نتیجه

$$\int_{1}^{e}(\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e 2\ln x\, dx = e - 2\int_1^e \ln x\, dx$$

برای محاسبه انتگرال اخیر مجددا از روش جز به جز استفاده می‌کنیم. با قرار دادن $u=\ln x$ و $dv=dx$ خواهیم داشت $du=\frac{1}{x}dx$ و $v=x$. در نتیجه

$$\int_1^e \ln x\, dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\, dx = e-(e-1)=1$$

در نتیجه $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2$.

ب) (۱۰ نمره) با استفاده از تغییر متغیر $u=e^x-1$، خواهیم داشت $e^x=u+1$ و در نتیجه $x=\ln(u+1)$ و $dx=\frac{1}{u+1}du$. به این ترتیب

$$\int \frac{1}{(e^x-1)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}\frac{1}{u+1}du = \int \frac{1}{u^2(u+1)}du$$

با استفاده از روش تجزیه کسرهای جزئی،

$$\frac{1}{u^2(u+1)} = \frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}+\frac{C}{u+1}$$

با محاسبه مشاهده می‌شود $A=-1$، $B=1$ و $C=1$. در نتیجه

$$\frac{1}{u^2(u+1)} = -\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u+1}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{۱}{(e^x-۱)^۲}dx &= \int \frac{۱}{u^۲(u+۱)}du = -\ln|u| - \frac{۱}{u} + \ln|u+۱| + C \\ &= -\ln|e^x-۱| - \frac{۱}{e^x-۱} + \ln(e^x) + C\end{aligned}$$

ج) (۱۰ نمره) با استفاده از تغییر متغیر $u=\ln x$ خواهیم داشت

$$\int_۱^e \frac{dx}{x\sqrt{۱+(\ln x)^۲}} = \int_۰^۱ \frac{du}{\sqrt{۱+u^۲}} = \sinh^{-۱}(u)\Big|_۰^۱ = \sinh^{-۱}(۱)$$

---

۵. الف) نشان دهید انتگرال ناسره $\int_۱^\infty \frac{dx}{x^۲}$ همگرا بوده و مقدار آن را به دست آورید.

ب) همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $\int_۱^\infty \frac{\cos^۲ x}{\sqrt{x^۴+x}}\,dx$ را بررسی کنید.

حل. الف) برای هر $c>۱$، تابع $g(x)=\frac{۱}{x^۲}$ بر $[۱,c]$ پیوسته و در نتیجه انتگرال‌پذیر است.

$$\int_۱^c \frac{۱}{x^۲}\,dx = -\frac{۱}{x}\Big|_۱^c = ۱-\frac{۱}{c} \;\Rightarrow\; \lim_{c\to\infty}\int_۱^c \frac{۱}{x^۲}\,dx = \lim_{c\to\infty}(۱-\frac{۱}{c}) = ۱$$

در نتیجه انتگرال ناسره $\int_۱^\infty \frac{۱}{x^۲}\,dx$ همگرا و مقدار آن برابر ۱ است. (۱۰ نمره)

ب) تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{\cos^۲ x}{\sqrt{x^۴+x}}$ بر $[۱,\infty)$ پیوسته و نامنفی است. در عین حال

$$\forall x\geq ۱, \qquad ۰\leq f(x)=\frac{\cos^۲ x}{\sqrt{x^۴+x}} \leq \frac{۱}{\sqrt{x^۴+x}} \leq \frac{۱}{x^۲} = g(x)$$

با توجه به همگرایی انتگرال ناسره $\int_۱^\infty \frac{۱}{x^۲}\,dx$ (قسمت الف) و آزمون مقایسه، انتگرال ناسره $\int_۱^\infty f(x)\,dx$ نیز همگرا است. (۱۰ نمره)