توجه: گفتیم که اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد، آن‌گاه $\sum a_n$ نیز همگرا است. (در صورتی که $\sum |a_n|$ همگرا باشد، می‌گوییم $\sum a_n$ همگرای مطلق است.) امکان دارد که $\sum a_n$ همگرا باشد ولی $\sum |a_n|$ همگرا نباشد، برای مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ همگرا است ولی $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ واگرا است. در این صورت می‌گوییم سری $\sum a_n$ همگرای مشروط است.

نکتهٔ جالب دربارهٔ آزمون نسبت.

اگر $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ آن‌گاه

الف) اگر $l<1$ آن‌گاه $\sum |a_n|$ همگرا است و (در نتیجه $\sum a_n$ نیز همگرا است.)

ب) اگر $l>1$ آن‌گاه $\sum |a_n|$ واگرا است و در عین حال $\sum a_n$ نیز واگرا است.

ج) اگر $l=1$ نظری نمی‌توان داد. (می‌تواند همگرای مطلق، مشروط یا واگرا باشد.)

به طور مشابه در آزمون ریشه، اگر $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$ آن‌گاه

الف) اگر $l<1$ آن‌گاه $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

ب) اگر $l>1$ آن‌گاه $\sum a_n$ و $\sum |a_n|$ هر دو واگرا هستند.

ج) اگر $l=1$ نظری نمی‌توان داد.

مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(\frac{1}{n})$

قرار دهید $a_n=\tan(\frac{1}{n})$ و $b_n=\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sin(\frac{1}{n})}{\cancel{\cos}(\frac{1}{n})} \quad 1$$

در درس‌های آینده ثابت خواهیم کرد که $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ پس

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{m\to 0}\frac{\sin(m)}{m}=1 \quad \left(n=\frac{1}{m}\right)$$

بنابر آزمون مقایسه حدی از آنجا که $\sum b_n$ واگراست نتیجه می‌گیریم $\sum a_n$ نیز واگراست.

مثال همگرایی مطلق یا مشروط سری‌های زیر را بررسی کنید:

① $\sum \frac{(-1)^n 3^n}{(2n)^n}$ $\qquad a_n=\frac{(-1)^n 3^n}{(2n)^n}$

$$\to |a_n| = \left|\frac{(-1)^n 3^n}{(2n)^n}\right| = \frac{3^n}{(2n)^n}$$

از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n}=0<1$$

بنابه آزمون ریشه $\sum|a_n|$ همگراست یعنی $\sum a_n$ همگرای مطلق است

مثال $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sqrt{2}a)}{n^2}$ ، a یک عدد حقیقی.

$$a_n=\frac{\sin(n\sqrt{2}a)}{n^2} \Rightarrow 0\le|a_n|\le\frac{1}{n^2}$$

از آنجا که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست نتیجه می‌گیریم که $\sum|a_n|$ همگراست یعنی $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

مثال $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$

روش ۱

$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ بنابراین $|a_n| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. قرار می‌دهیم $b_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

بنابراین بنابه آزمون مقایسه حدی سری $\sum |a_n|$ همگرای مطلق است

راه حل دوم

$$\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

توجه

$$a_0 - a_{k+1} = \sum_{n=0}^{k} a_n - a_{n+1}$$

پس $S_k = \sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{k+2}$ یعنی $\lim_{k\to\infty} S_k = 1$

و می‌دانیم که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k$ پس سری مورد نظر همگرا است.

راه حل سوم

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+3} < 1$$

از آن جا که جملات دنباله مثبت هستند و $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ نتیجه می‌گیریم که a_n یک دنباله نزولی است همچنین واضح است که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ پس بنابه آزمون لایبنیتز $\sum (-1)^n a_n$ همگرا است