کاربرد دنباله‌ها و سری‌ها

① دنباله‌ها ابزاری برای توصیف مفهوم «میل کردن» هستند.

② سری‌ها برای وصف و تقریب توابع بسیاری کاربرد دارند.

$$\left(\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

③ حل معادلات دیفرانسیل $(y'' + 2y' = y)$

یادآوری

آزمون نسبت (Ratio test

اگر $a_n \geq 0$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ آن‌گاه $\sum a_n$ همگراست. اگر $l > 1$ سری مورد نظر واگراست و اگر $l = 1$ این آزمون استفاده‌ای ندارد.

مثال

آیا آزمون نسبت می‌تواند واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را ثابت کند؟

$a_n = \frac{1}{n}$

$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ آزمون نسبت به کار نمی‌آید.

مثال

$\sum \frac{1}{n!}$ $\quad 0! := 1$

$a_n = \frac{1}{n!}$

$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

بنا به آزمون نسبت سری مورد نظر همگرا است.

مثال: فرض کنید که t یک عدد حقیقی دلخواه باشد. نشان دهید سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ همگراست.

$$1+\frac{t}{1}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\dots = \text{یک عدد}$$

$$a_n = \frac{t^n}{n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{t^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$$

بنابه آزمون نسبت همگراست.

توجه: در مثال قبل به شرط $t \geq 0$ نیازی نداریم. کافی است با آزمون نسبت نشان دهیم که $\sum \left|\frac{t^n}{n!}\right|$ همگراست و از آن نتیجه بگیریم که $\sum \frac{t^n}{n!}$ همگراست.

توجه: گفتیم که سری $\sum \frac{t^n}{n!}$ برای هر مقدار t همگراست. پس می‌توانیم یک تابع به صورت زیر تعریف کنیم:

$$t \longmapsto 1+t+\frac{t^2}{2!}+\dots \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$t \mapsto \sum \frac{t^n}{n!}$$

تابع فوق را «تابع نمایی» می‌نامیم و می‌نویسیم

$$e^t = \sum \frac{t^n}{n!} = 1+t+\frac{t^2}{2!}+\dots$$

توجه جالب. از این نتیجه می‌شود که برای هر عدد دلخواه t

دنباله $\frac{t^n}{n!}$ به صفر همگراست

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t^n}{n!} = 0$$

تمرین

① $\sum \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

② $1 - \frac{2!}{1.3} + \frac{3!}{1.3.5} - \frac{4!}{1.3.5.7} + \cdots$

$$= \sum \frac{(-1)^{n-1}\, n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$$

مثال

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1000}}{2^n}$$

$$a_n = \frac{n^{1000}}{2^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{1000}}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{\frac{(n+1)^{1000}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{1000}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1000}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

بنابه آزمون نسبت این سری مورد نظر همگراست

توجه جالب) اگر $a>1$ و k عدد دلخواهی (طبیعی) باشد آن گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

آزمون ۸ (آزمون ریشه)

فرض کنید $0 \le a_n$ یک دنباله باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

① اگر $l < 1$ سری $\sum a_n$ همگرا است.

② اگر $l > 1$ یا $l = \infty$ آن گاه $\sum a_n$ واگرا است.

③ اگر $l = 1$ آزمون ریشه کمکی نمی کند.

مثال

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{2n+3}{3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3} < 1$$

پس بنابر آزمون ریشه، سری مورد نظر همگرا است.

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 1+1+\frac{1}{2!}+\dots$$

$$e > 1$$

در نتیجه بنابر آزمون ریشه سری مورد نظر واگرا است.

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2!}+\dots$$

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\dots$$

تمرین آزمون ریشه را (حداقل بخش اول) ثابت کنید.

تمرین

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$$

آزمون ۹ (سری‌های متناوب)

مثال درباره‌ی همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ بحث کنید.

$S_1 = +1$

$S_2 = +1 - \frac{1}{2}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < S_1$

$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \qquad S_4 \geq S_2$

$S_6 = (1) - \frac{1}{2} + (\frac{1}{3}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{5}) - \frac{1}{6}$

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

دنباله‌ی S_{2n} صعودی است و از بالا کراندار است.

پس S_{2n} همگراست.

$S_6 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

$\square < 1$

همچنین داریم

$S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} = \frac{1}{2n}$

همگرا — به صفر همگرا

در نتیجه $\lim S_{2n-1} = \lim S_{2n}$ بنابراین دنباله‌ی S_n
همگراست. بنابراین سری $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ نیز همگراست.

آزمون ۱۰ (لایبنیتز) (Leibniz)

فرض کنید $0 \le a_n$ یک دنباله‌ی نزولی و همگرا به صفر باشد.

آن گاه سری $\sum (-1)^n a_n$ همگراست.

مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ (سری کاه)

توجه حد $\lim \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ موجود
نیست پس این سری واگراست.

مثال $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$

اثبات آزمون ریشه

فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$. آنگاه بنابه تعریف حد دنباله‌ها

برای هر $\varepsilon > 0$ اندیس N پیدا می‌شود به گونه‌ای که برای هر $n > N$

داشته باشیم

$$l-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon$$

حال $\varepsilon > 0$ را به گونه‌ای انتخاب کنید که $l + \varepsilon < 1$ ، بنابراین داریم

$$a_{N+1} < (l+\varepsilon)^{N+1}$$

$$a_{N+2} < (l+\varepsilon)^{N+2}$$

$$\vdots$$

پس

$$\sum a_n = \overbrace{a_1 + \cdots + a_N}^{\text{کراندار}} + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

$$\leq a_1 + \cdots + a_N + (l+\varepsilon)^{N+1} + (l+\varepsilon)^{N+2} + \cdots$$

$$= a_1 + \cdots + a_N + (l+\varepsilon)^{N+1}\left(1 + (l+\varepsilon) + (l+\varepsilon)^2 + \cdots\right)$$

عبارت داخل پرانتز یک سری هندسی با قدر نسبت $l+\varepsilon < 1$ است پس همگراست.

بنابراین سری $\sum a_n$ نیز همگراست.

تمرین نشان دهید $\sum (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$ همگراست.

تابع $f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$ برای x های به اندازهٔ کافی بزرگ نزولی است. نکته:

$$f'(x)=\frac{2x(x^3+1)-3x^2\times x^2}{(x^3+1)^2}=\frac{-x^4+2x}{(x^3+1)^2}=\frac{-x(x^3-2)}{(x^3+1)^2}$$

عبارت مخرج همواره مثبت است. عبارت صورت برای $x>\sqrt[3]{2}$ منفی است. پس دنبالهٔ $\frac{n^2}{n^3+1}$ برای $n\geq 2$ نزولی است. هم چنین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}=0$$

پس بنابر آزمون لایبنیتز سری $\sum (-1)^n\frac{n^2}{n^3+1}$ همگراست.

تمرین آیا سری $\sum \frac{n^2}{n^3+1}$ همگراست؟