بنا اغذا. توجه: منظور از $\sum$، عبارت $\sum_{n=0}^{\infty}$ است.

یادآوری (آزمونها)

- اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آن گاه $\sum a_n$ واگراست.

- اگر $0 \le a_n \le b_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشد، آن گاه $\sum a_n$ همگراست.

آزمون 5)

اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد آن گاه $\sum a_n$ همگراست.

اثبات غلط: از آنجا که $a_n \le |a_n|$ با استفاده از آزمون مقایسه به نتیجه می‌رسیم. (این اثبات اشتبا. است زیرا در آزمون مقایسه، جملات دنباله‌ها باید نامنفی باشند)

اثبات درست: داریم $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ بنابراین داریم

$$(*) \quad 0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$$

حال می‌توان از آزمون مقایسه بهره جست.

سری $\sum 2|a_n|$ همگراست، پس بنابه (*) سری $\sum (a_n+|a_n|)$ همگراست. از آنجا که $\sum |a_n|$ همگراست پس $\sum a_n+|a_n|-|a_n|$ یعنی $\sum a_n$ همگراست.

بنام خدا

مثال: همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n^2}$

پاسخ: داریم $0 \le \left|\frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. از آنجا که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، بنابه آزمون مقایسه، $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n^2}\right|$ نیز همگراست. پس بنابه آزمون قبلی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n^2}$ همگراست.

توجه: اگر $\sum a_n$ همگرا باشد نتیجه نمی‌شود که $\sum |a_n|$ همگراست.

مثال نقض: سری $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگراست (فعلاً بپذیرید!)

اما سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست.

سوال: آیا سری $\sum (-1)^n$ همگراست؟ (خیر، چرا؟)

مثال: همگرایی یا واگرایی سری $\sum \frac{1}{2^n+1}$ را بررسی کنید.

(توجه: $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$ از آزمون مقایسه و آزمون سری‌های هندسی نتیجه بگیرید که $\sum \frac{1}{2^n+1}$ همگراست)

تمرین: همگرایی یا واگرایی $\sum \frac{1}{2^n-1}$ را بررسی کنید.

## آزمون 6 (آزمون مقایسه حدی)

فرض کنید $a_n$ و $b_n$ دو دنباله با جملات نامنفی باشند. فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$. آن گاه

$\sum a_n$ همگراست $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ همگرا باشد

($\sum a_n$ واگراست $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ واگرا باشد)

**اثبات**: از این که $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ نتیجه می‌گیریم که برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه

از جایی به بعد داریم: $l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$ (*).

می‌توان $\varepsilon$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که (*) برقرار باشد و $l - \varepsilon > 0$.

پس از جایی به بعد داریم $a_n < (l+\varepsilon) b_n$. حال بنا به آزمون مقایسه اگر $\sum b_n$ همگرا باشد $\sum a_n$ هم همگراست. از طرفی $a_n > (l-\varepsilon) b_n$ پس اگر $\sum b_n$ واگرا باشد آن گاه $\sum a_n$ واگراست.

**مثال**. $\sum \frac{1}{2^n - 1}$.

**پاسخ**. قرار دهید $a_n = \frac{1}{2^n-1}$ و $b_n = \frac{1}{2^n}$.

داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = 1 > 0$$

از آن جا که $\sum \frac{1}{2^n}$ همگراست با مقایسه حدی نتیجه می‌گیریم که $\sum \frac{1}{2^n-1}$ همگراست.

مثال $\sum \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$

جزء توانی: $\frac{n^2}{n^{\frac52}} = \frac{1}{n^{\frac12}}$

پاسخ قرار دهید $a_n = \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ , $b_n = \frac{1}{n^{\frac12}}$

داریم $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n^2+3n)\times n^{\frac12}}{\sqrt{5+n^5}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2n^{2-\frac52} + 3n^{1-\frac52}\right)\times n^{\frac12}}{\sqrt{\frac{5}{n^5}+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} 2n^{2-\frac52+\frac12} + 3n^{1-\frac52+\frac12} = \lim_{n\to\infty} 2+3n^{-1} = 2$$

از آنجا که سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac12}}$ واگراست (سری هارمونیک با $p=\frac12$) ; $\lim \frac{a_n}{b_n} = 2 \neq 0$

نتیجه می‌گیریم که $\sum a_n$ واگراست.

تمرین همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac12}}{\sqrt{3n+2n^5}}$

ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

حل ب) $a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ , $b_n = \frac{1}{n}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt[n]{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

از آنجا که $\sum \frac1n$ واگراست نتیجه می‌گیریم که $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ واگراست.

**مثال**

$$\sum \frac{2^n - n}{3^n + 2}$$

جزء زیر

$$\lim \frac{2^n - n}{3^n + 2} \times \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \frac{n}{2^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} = 1$$

قرار می‌دهیم $a_n = \frac{2^n - n}{3^n + 2}$ ، $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

داریم $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ حال از آنجا که $\sum b_n$ یک سری هندسی همگراست نتیجه می‌گیریم که $\sum a_n$ همگراست.

**راه حل دوم**

می‌دانیم $\sum \frac{2^n}{3^n}$ همگرا است و همچنین می‌دانیم که

$$\frac{2^n - n}{3^n + 2} < \frac{2^n}{3^n}$$

پس با آزمون مقایسه سری مورد نظر همگراست.

**تمرین**

همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \sin k}{1 + k^3}$

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n}}{2+n}$

آزمون 7 (آزمون نسبت)

فرض کنید $0 \le a_n$ یک دنباله باشد و فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

آنگاه: ۱) اگر $0 \le l < 1$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست

② اگر $l>1$ یا $l=\infty$ آنگاه $\sum a_n$ واگرا است

③ اگر $l=1$ آنگاه این آزمون جواب نمی‌دهد.

اثبات ۱. فرض کنید $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. پس از یک $N$ به بعد داریم

$l-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l+\varepsilon$ حال $\varepsilon$ را به گونه‌ای بگیرید که

$l+\varepsilon<1$. پس از یک $N$ به بعد داریم $a_{n+1} < (l+\varepsilon) a_n$. پس

$a_{N+1} < a_N(l+\varepsilon)$, $a_{N+2} < a_{N+1}(l+\varepsilon) < a_N(l+\varepsilon)^2$, $a_{N+3} < a_N(l+\varepsilon)^3$

و به همین ترتیب.

$$\sum a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

$$\le a_0 + a_1 + \cdots + a_N + a_N(l+\varepsilon) + a_N(l+\varepsilon)^2 + a_N(l+\varepsilon)^3 + \cdots = a_0 + \cdots + a_N\underbrace{\left(1 + (l+\varepsilon) + (l+\varepsilon)^2 + (l+\varepsilon)^3 + \cdots\right)}$$

یک سری هندسی همگراست. زیرا $l+\varepsilon<1$.