توجه

نحوه صحیح استفاده از فرمول δ و ε برای حد دنباله‌ها

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n\in\mathbb{N} \ \left(n>N \to |a_n - L|<\varepsilon\right)$$

نوشته‌های اشتباه:

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$ s.t.

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N \to$

مثال

با استفاده از تعریف مستقیم نشان دهید.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

جواب برای اثبات حکم بالا باید ثابت کنیم که

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n\in\mathbb{N} \ \left(n>N \to \left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon\right)$$

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

هدف پیدا کردن $N\in\mathbb{N}$ به طوری که عبارات بالا برقرار باشد.

ادامهٔ جواب

برای ε داده شده، اگر N یک عدد طبیعی دلخواه بزرگتر از $\frac{1}{\varepsilon}-1$ باشد، آنگاه

$$\forall n > N \quad \left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad \overrightarrow{a_N \quad a_{N+1} \cdots}$$

$$\downarrow$$

$$N > \frac{1}{\varepsilon}-1$$

چرک‌نویس

① $\left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$

② $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon}-1$

تمرین ۱

اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات نامنفی باشد و همگرا باشد

نشان دهید که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ نیز همگرا است.

پاسخ: از آن جا که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا است نتیجه می گیریم که

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. بنابراین دنباله a_n کراندار است، فرض کنید

برای هر n داشته باشیم $a_n \leq M$

داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot a_n$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} M a_n$$

سری $\sum_{n=0}^{\infty} M a_n = M \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا است پس بنا بر آزمون مقایسه

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ همگرا است.

تمرین

نشان دهید که هر دنباله‌ی همگرا، کراندار است.

تمرین ۲ با فرضهای تمرین 1 نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_n^2+1}$$

نیز همگرا است.

پاسخ: $a_n^2+1 \geq 1$. بنابراین $\frac{a_n^2}{a_n^2+1} \leq a_n^2$

ادامه جواب

در تمرین قبل نشان دادیم که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ همگرا است.

از آنجا که $\sum \frac{a_n^2}{a_n^2+1} \leq \sum a_n^2$، بنا به آزمون مقایسه

سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_n^2+1}$ همگرا است.

تمرین 3: همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{(2\times 4\times\cdots\times 2n)\left(3^{n}+1\right)}$$

توجه

$$= \frac{1}{2(3^{1}+1)} + \frac{1\times 3}{2\times 4(3^{2}+1)} + \frac{1\times 3\times 5}{(2\times 4\times 6)(3^{3}+1)} + \cdots$$

جواب:

اولاً

$$\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\le 1$$

پس

$$\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{(2\times 4\times\cdots\times 2n)\left(3^{n}+1\right)}\le 1\times\frac{1}{3^{n}+1}$$

$$\le \frac{1}{3^{n}}$$

سری $\sum \frac{1}{۳^n}$ یک سری هندسی با

قدر نسبت $\frac{1}{۳}$ است و به $\frac{1}{1-\frac{1}{۳}}$

همگرا است. بنا به آزمون مقایسه

سری مربوط به تمرین نیز همگرا است.

تمرین 4 همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n}}$$

جواب

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n}} \geq \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n^2}} = \sum \frac{1}{\sqrt[3]{2}\, n^{\frac{2}{3}}}$$

سری $\sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ یک سری همساز با $p<1$ البته سری واگرا است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \underbrace{\sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}_{\text{واگرا}}$$

بنا به آزمون مقایسه سری مورد سوال واگراست.