آزمون‌های همگرایی سری‌ها

① یادآوری: برای این که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ وجود داشته باشد

شرط لازم آن است که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ؛ یعنی اگر

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ می‌دانیم که سری $\sum a_n$ همگرا نیست

ولی اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ باید روش‌های دیگر را بررسی کنیم

مثال سری $\sum_{n=0}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$

توجه $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1 \neq 0$

$\frac{1}{x} = n \to \infty$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

بنابراین سری $\sum_{n=0}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ واگرا است.

تمرین: همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

$$\frac{\sin(1)}{1}+\frac{\sin(2)}{2}+\frac{\sin(3)}{3}+\cdots$$

چون $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}=0$ پس آزمون همگرایی دنباله در این جا کار نمی کند

$$1-r^3 = (1-r)(1+r+r^2)$$

$$\Rightarrow 1+r+r^2 = \frac{1-r^3}{1-r}$$

$$\vdots$$

$$(*)\quad 1+r+r^2+\dots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

آزمون ٤ی همگرایی سریها

تمرین

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$$

آزمون دوم

آزمون سریهای هندسی

نتیجه

$$(1-r)(1+r) = 1-r^2$$

$$1+r = \frac{1-r^2}{1-r}$$

أثبات (*)

$$S = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$$

$$rS = r + r^2 + \dots + r^{n+1}$$

$$S - rS = 1 - r^{n+1} \Rightarrow$$

$$(1-r)S = 1 - r^{n+1} \Rightarrow$$

$$S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

آزمون های همگرایی سری‌ها

آزمون سری‌های هندسی

سری $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$

همگراست اگر و تنها اگر $0 \le |r| < 1$

اثبات

$$S_n = 1 + r^1 + r^2 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & |r|<1 \\ \text{وجود ندارد} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

توجه

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & 0 \le |r| < 1 \\ \text{وجود ندارد} & |r| > 1 \end{cases}$$

خلاصه

اگر $|x|<1$ آن‌گاه

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

نکته‌ی جالب: تابع $f(x) = \frac{1}{1-x}$ برای xهایی که $|x|<1$ برابر با چند جمله‌ای نامتناهی $1+x+x^2+\dots$ شده است.

تكملة حا العشر

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots$$

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + (-1)(-x) + \frac{(-1)(-2)}{2}(-x)^2 + \cdots =$$

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

$\downarrow$

إذا

$|x| < 1$

آزمون های همگرایی سری‌ها

تمرین: بسط تابع $\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$ را بنویسید.

تمرین: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

پاسخ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ یک سری هندسی است

با قدر نسبت $r=\frac{1}{3}$ پس

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n (3) = 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ یک سری هندسی با قدر نسبت

$r=\frac{4}{3}>1$ است پس واگراست.

توجه

$$r+r^2+\cdots = r(1+r+r^2\cdots)$$

جمله اول

$$= r\left(\frac{1}{1-r}\right) = \frac{r}{1-r}$$

قدر نسبت

$$r^2+r^3+r^4+\cdots = \frac{r^2}{1-r}$$

آزمون‌های همگرایی سری‌ها

توجه: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ به ترتیب به a , b همگرا باشند آن گاه

$$\sum_{n=0}^{\infty}(Ma_n+Nb_n) = M\sum_{n=0}^{\infty}a_n + N\sum_{n=0}^{\infty}b_n = Ma+Nb$$

تمرین: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا باشند نشان دهید که سری‌های $\sum_{n=0}^{\infty} a_nb_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ همگرا هستند.

$$\sum a_nb_n = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+\cdots \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

سؤال

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n}}{4^{n}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n}}{4^{n}} = \sum \frac{2^{n+1}}{4^{n}} + \sum \frac{3^{n}}{4^{n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \times \frac{2^{n}}{4^{n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n}}{4^{n}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

$$= 2 \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{3}{4}}$$

تمرین

$$S = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n}}{4^{n}}$$

مثال به ازای چه x هایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^{n+1}}$ همگرا است؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3 \times 3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x-5}{3}\right)^n$$

سری فوق یک سری هندسی است با قدر نسبت $r = \frac{2x-5}{3}$. این سری تنها در صورتی می‌تواند همگرا باشد که $\left|\frac{2x-5}{3}\right| < 1$ باشد یعنی

$$-1 < \frac{2x-5}{3} < 1$$

یعنی برای $1 < x < 4$ همگرا است

آزمون سوم (سریهای همساز) Harmonic

آزمون : سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ تنها در صورتی همگراست

که $p>1$

p می تواند عدد گویا باشد

توجه برای $p=1$ ثابت کردیم که $\sum \frac{1}{n}$ واگراست. برای $p=2$ ثابت کردیم که $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست. برای $p>2$ داریم:

$$\sum \frac{1}{n^p} \leq \sum \frac{1}{n^2}$$

پس $\sum \frac{1}{n^p}$ همگراست. برای $p<1$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

پس $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ واگراست

برای $1<p<2$ بعداً در همین درس ثابت خواهیم کرد که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست.

مثال $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ همگراست زیرا برابر است با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ و $\frac{3}{2}>1$ (از نوع سری های p)

تمرین: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ را بررسی کنید.

آزمون چهارم (آزمون مقایسه)

فرض کنید a_n و b_n دنباله‌هایی با جملات نامنفی باشند.

همچنین فرض کنید از جایی به بعد داشته باشیم $a_n \leq b_n$.

۱) اگر $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آن گاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا است

۲) اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آن گاه $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ واگرا است.

اثبات ۱ برای این که $\sum a_n$ همگرا باشد باید دنباله $\{S_n\}$ $\left(S_n = a_0 + \dots + a_n\right)$ همگرا باشد.

$S_0 = a_0$

$S_1 = \underbrace{a_0 + a_1}_{\text{مثبت}} \geq S_0$

$S_2 = S_1 + a_2 \geq S_1$

$S_n = S_{n-1} + a_n$ مثبت $S_n \geq S_{n-1}$

دنباله S_n صعودی است (۱)

از طرفی $S_n = a_0 + \dots + a_n \leq b_0 + \dots + b_n \leq \sum b_n = b$

یعنی S_n از بالا کراندار است (۲)

$(1),(2) \Rightarrow S_n$ همگرا است

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$$

داریم

$$\frac{5}{2n^2+4n+3} < \frac{5}{2n^2}$$

پس سری بالا را با سری $\sum \frac{5}{2n^2}$ مقایسه می کنیم برای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

یک سری همساز با $p=2>1$ است پس همگرا است.

پس $\sum \frac{5}{2n^2}$ همگرا است بنابراین از آزمون مقایسه سری مورد مثال هم همگرا است.