یادآوری

اگر a_n یک دنباله صعودی و از بالا کراندار باشد آن گاه a_n همگرا است.

نکته: (اصل کمال) هر زیرمجموعه از بالا کراندار از اعداد حقیقی دارای کوچکترین کران بالا است.

$$A=\{a_1, a_2, \dots\}$$

به طور مشابه هر دنباله نزولی از پایین کراندار، همگرا است.

مثال فرض کنید a_n با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده باشد

$$a_1=\sqrt{2}$$

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$$

ادعا: دنباله a_n از بالا کراندار است.

اثبات ادعا: اولاً $a_1=\sqrt{2}<2$

حال فرض کنید که اگر $a_n<2$ آن گاه

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$$

بنا به استقراء، برای هر n داریم $a_n<2$.

اثبات صعودی بودن

با استقراء روی n نشان می دهیم که

برای هر n داریم: $a_{n+1}>a_n$. اولاً $a_2>a_1$ زیرا

$\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}$ ثانیاً ادعا می کنیم که اگر $a_{n+1}>a_n$ آنگاه

توجه: تنها کراندار بودن یک دنباله همگرایی آن را نتیجه نمی‌دهد. برای مثال دنباله $a_n=(-1)^n$ کراندار است ولی همگرا نیست.

قسمت دوم سوال: یافتن حد دنباله a_n.

می‌دانیم که دنباله a_n همگرا است. همچنین می‌دانیم که $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$. فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

$a_{n+2} > a_{n+1}$. داریم:

$$a_{n+1} > a_n \Longrightarrow 2+a_{n+1} > 2+a_n$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2+a_{n+1}} > \sqrt{2+a_n}$$

$$\Longrightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$$

پس $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \ell$. پس $\ell = \sqrt{2+\ell}$

یعنی $\ell = 2$. پس دنباله مورد نظر به عدد 2

همگرا است.

$$2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}}}$$

مثال: فرض کنید a_n با رابطهٔ بازگشتی زیر داده شده باشد.

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$$

نشان دهید که a_n همگراست و حد آن را بیابید.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$$

$a_{۲} > a_{۱}$

$a_{۳} < a_{۲}$ $\quad$ $a_{۱} < a_{۲}$

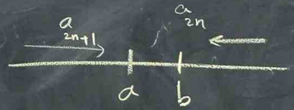
$a_{۴} > a_{۳}$ $\quad$ $a_{۱} < a_{۳} < a_4 < a_2$

$a_1 < a_3 < a_5 < a_6 < a_4 < a_2$

(اثبات کنید) $a_1 < a_3 < a_5 < a_7 < \dots\dots < a_6 < a_4 < a_2$

1- زیر دنباله (a_{2n+1}) صعودی و از بالا کراندار است $\Leftarrow$ همگراست به ℓ.

2- زیر دنباله (a_{2n}) نزولی و از پایین کراندار است $\Leftarrow$ همگراست به ℓ'.



$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

$$(a_{2n+1}) = 1 + \frac{1}{1+a_{2n}}$$

$$(a_{2n}) = 1 + \frac{1}{1+(a_{2n-1})}$$

$$l = 1 + \frac{1}{1+l'}$$

$$l' = 1 + \frac{1}{1+l}$$

$$\Rightarrow l = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1+l}} \Rightarrow$$

$$l = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+l}} = 1 + \frac{1}{\frac{3+2l}{1+l}} = 1 + \frac{1+l}{3+2l} = \frac{1+l+3+2l}{3+2l} = \frac{3l+4}{3+2l} = l$$

$$\cancel{3l} + 4 = \cancel{3l} + 2l^2$$

$$l^2 = 2$$

$$l = \sqrt{2}$$

زیرا جملات مثبتند

به طور مشابه می توان دید که

$$l' = \sqrt{2}$$

توجه: فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$

آن گاه دنباله‌ی a_n همگرا است و $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

مثال قبل همگرا به $\sqrt{2}$ است.

بنابه توجه بالا، دنباله‌ی کسرهای مسلسل

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

توجه: حد یک دنباله در صورت وجود یکتاست.

اثبات: فرض کنید a_n یک دنباله باشد و فرض کنید که $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

ادعا: $a = b$.

اثبات ادعا: از آنجا که $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

می‌دانیم که عدد N_1 موجود است به طوری که برای هر $n > N$ داریم:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

از طرفی از آنجا که $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. برای هر $\varepsilon>0$

یک عدد N_2 موجود است که برای $n>N_2$ داریم

$$|a_n-b| < \varepsilon/2$$

پس برای هر $\varepsilon>0$ اگر $n>\max\{N_1,N_2\}$ آنگاه

$$|a-b| = |a-a_n+a_n-b| \le$$

$$|a-a_n| + |a_n-b| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

در نتیجه برای هر $\varepsilon>0$ داریم

$$0\le |a-b| < \varepsilon$$

بنابه ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی داریم

$$|a-b| = 0$$

پس $a=b$.

یادآوری اگر a_n یک دنباله باشد منظور از $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ عبارت زیر است:

$$a_0+a_1+a_2+\cdots$$

می‌گوییم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$ هرگاه $\lim_{n\to\infty} S_n = L$

که در آن $S_n = a_0+a_1+\cdots+a_n$

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots\cdots$$

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L \underset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} S_n = L$$

آزمونهای همگرائی سریها

آزمون اول (همگرائی دنباله)

لم) اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آن گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. به بیان دیگر اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آن گاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا نیست.

توجه: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ نتیجه نمی‌گیریم که سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست. برای مثال

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ولی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

واگراست. (در جلسات قبل دیدیم که)

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ a_n

جواب:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{5}$$

از آنجا که $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

نتیجه می‌گیریم که سری مورد نظر

واگراست.

توجه عبارت‌های زیر هم‌ارزند:

۱) $p \to q$

۲) p شرط کافی برای q است.

۳) q شرط لازم برای p است (اگر q نباشد p نیست)

اثبات: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد بنا به تعریف دنباله S_n همگراست فرض کنید $\lim_{n\to\infty} S_n = L$.

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}$$

پس $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = L$ یعنی $\lim_{n\to\infty} \underbrace{(S_{n+1} - S_n)}_{= a_{n+1}} = L - L = 0$

پس $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$ یعنی $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

آزمونهای همگرائی سریها

مثال: همگرائی یا واگرائی سریهای زیر را بررسی کنید.

الف) $$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+2^n}}$$

پاسخ: در جلسه قبل دیدیم که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n} = 2$ پس $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$ پس $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگرا است.

ب) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

پاسخ:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \neq 0$$

از آنجا که $\lim a_n = e \neq 0$ سری $\sum a_n$ واگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$$

(&