قضیه مقدار میانگین

فرض کنید a یک نقطه دلخواه باشد و تابع

f یک تابع بار مشتق پذیر باشد.

$\exists c \in (a,x) \quad f(x) = f(a) + \underbrace{f'(c)(x-a)}$

$\exists c \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$

خطای تقریب

$\exists c \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

چند جمله‌ای تیلور درجه n ام

سری توان

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

$$-R < x-a < R$$

اگر $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots = f(x) = \sum_{n=0} c_n (x-a)^n$

آنگاه $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

$$\int f(x)\,dx = \sum \int c_n (x-a)^n$$

$$f(a) = c_0$$

$$f'(a) = c_1$$

$$\frac{f''(a)}{2} = c_2$$

$$\frac{f'''(a)}{3!} = c_3$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$

آنگاه $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

بسط تیلور تابع f حول نقطه a

② تابع e^x حول $a=2$.

$$e^x = \sum c_n (x-2)^n$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{e^2}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n$$

$$e^x = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(برای تمام $x \in \mathbb{R}$)

مثال

بسط تیلور توابع زیر را حول نقطه داده شده بنویسید

$f(x) = e^x$

① تابع e^x حول نقطه $x=0$

$f'(0) = 1$

$$\frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2!}$$

$f^{(n)}(0) = 1$

$$y'' + y' = y$$

$$\sum c_n (x-a)^n$$

مثال

نشر Sinx حول x=0

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n$$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = -1$

$$0 + 1x + 0x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

مثال

تابع Cosx حول النقطة صفر

$$\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

مثال

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1$$

$$x\cos x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n!}$$

مثال

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$$

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

مثال بسط تیلور تابع $f(x)=(1+x)^n$ را حول نقطه $x=0$ بنویسید.

n می‌تواند منفی باشد

$$f(0)=1$$

$$f'(0)=n$$

$$f''(0)=n(n-1)$$

$$f'(x)=n(1+x)^{n-1}$$

$$f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

$$f'''(x)=n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$$

$$f'''(0) = n(n-1)(n-2)$$

$$f^{(k)}(0) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k \qquad |x|<1$$

$$n=-2$$

$$\binom{n}{k}$$

$$\left(1+\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + -\frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2$$

$$\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{(-x)}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \dots$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots$$

[illegible] $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$

$$(4-x)^{-\frac{1}{2}} = \left(4\left(1-\frac{x}{4}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$4^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dots$$

مثال

[illegible]

$$(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 + (-2)x + \frac{-2\times-3}{2!}x^2 + \frac{-2\times-3\times-4}{3!}x^3 + \frac{-2\times-3\times-4\times-5}{4!}x^4 + \dots$$

$n=-2$

$k=1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

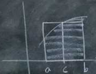
مثال

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$\exists c$

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c)$$

تعبیر مقدار میانگین برای انتگرال



$\exists c$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

تعبیر مقدار میانگین برای مشتق

$$\exists c \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

مثال

$$\tan^{-1} x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

نسبت محیط یک دایره به شعاع

$2.1415\ldots$

$\pi = 3.141592\ldots$

$0, 1, 2, \ldots$ $\mathbb{N}$

$x + 2 = 0$

$0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\mathbb{Z}$

$5x = 6$

$\left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Q}$

اعداد مختلط

$$\frac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a} = f(c)$$

مثال

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$\exists c$

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(c)$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3(-1)}}{2}$$

$$a + bi$$

$$\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$$

هر چند جمله‌ای $a_nx^n + \dots$ که ضرایب a_i در اعداد مختلط

باشد هر ریشه‌ی آن در $\mathbb{C}$ قرار دارد.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$i^2 + 1 = 0$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Imaginary

حل

$$x^2 + 1 = 0$$

$$ax^2 + bx + c$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فرمول اویلر

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}$$

$z = \cos\theta + i\sin\theta$

$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

اثبات شکل i

$$i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdots\right)$$

$$i\sin\theta$$

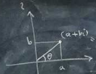
$=$

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$$

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

i^2



$$\underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{|z|}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = |z|\,\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

جمع

$$(a+bi) + (c+di) =$$

$$(a+c) + (b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + cbi - bd$$

$$= (ac - bd) + (ad + cb)i$$