بنام خدا

ارائه اعتراضات به میان ترم:
۴شنبه ۱۰ تا ۱۲

مثال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$$

بررسی $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

توابع $\frac{x^2}{1+x^6}$ و $\frac{1}{x^4}$ در بازه $[1,\infty)$ نامنفی هستند و داریم
پیوسته و

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{1+x^6}}{\frac{1}{x^4}} = 1$$

بنابر آزمون مقایسه حدی $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$
همگراست اگر و تنها اگر $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

همگرا باشد. از طرفی می‌دانیم که $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$
همگراست. پس $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ نیز
همگراست. داریم

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \underbrace{\int_0^{1} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx}_{\text{عدد}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx}_{\text{همگرا}}$$

بنابراین $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ همگراست.

از آنجا که تابع $\frac{x^2}{1+x^6}$ زوج است داریم

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}$$

پس $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ نیز همگراست.

ادامه اعتراضات به سوال ترم:
۴شنبه ۱۰ تا ۱۲

مثال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$$

از آنجا که $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^6}$ و $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ هر دو همگرا هستند نتیجه می‌گیریم که $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ نیز همگرا است.

راه حل دوم

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$u = x^3$

$du = 3x^2\,dx$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}(u) = \frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3) + C$$

که

نیز برابر

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^6}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^6}\,dt =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{3}\tan^{-1}(t^3)\right]_0^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)\right] = \frac{1}{3}\times\frac{\pi}{2}$$

$$= \pi/6$$

به نام خدا

ارائه اعتراضات به میان ترم:

۴شنبه - ۱۵ تا ۱۲

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$$ بنابراین

همگرا است.

به طور مشابه نشان دهید $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ نیز همگراست.

همگراست. بنابراین $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ همگراست.

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt$$

① توجه به انتگرال‌پذیری تابع

در هر بازه $[a,c]$

$c>a$

② $$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^{x} f(t)\,dt$$

$f(x)$

③ $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{\infty} f(t)\,dt$$

تمرین

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$$

تست مقایسه حدی:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ اگر $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ همگرا باشد $\Leftarrow$ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ همگراست.

همگرایی

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x+x^2}\; e^{-x}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\overbrace{-x^2+x}^{\to -\infty}}}{\sqrt{x+x^2}} = 0$$

(۲) توابع $f(x)=\dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x+x^2}}$ و $g(x)=e^{-x}$ در $(1,+\infty)$ نامنفی و پیوسته هستند و

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$ و

در جلسات قبل نشان دادیم که $\int_1^\infty e^{-x}dx$ همگراست پس $\int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x+x^2}}dx$ نیز همگراست.

راه حل دیگر: مقایسه تابع تحت انتگرال با تابع $\frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x+x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{\sqrt{x+x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{+x^2}\sqrt{x+x^2}} = 0$$

تمرین

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$$

$f(x)$

پاسخ: در تمرین قبل دیدیم که $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$

همگرا است.

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x+x^2}}\,dx = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t+t^2}}\,dt$$

$f(x)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t+t^2}} = \infty$$

$$\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t+t^2}} < \frac{e^0}{\sqrt{t}}$$

چون دیدیم که $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ همگرا است و از آن نتیجه بگیریم که

$\int_0^1 f(t)\,dt$ همگرا است.

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} = (uv - \int v \, du)$$

$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$\boxed{du = dx} \qquad \boxed{v = -\cos x}$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx = \boxed{-x\cos x + \sin x}$$

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int \sin u \,(\,)\,du$$

$$2\underbrace{\int \sin u \; u \, du}$$

با روش جزء به جزء حل کنید

$u = \sqrt{x} \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$\Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du =$

$2u\,du$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\sqrt{x}\; d$$

پاسخ: محاسبه‌ی تابع اولیه‌ی $\sin\sqrt{x}$

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx$$

مثال

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx =$$

$u=\sqrt{x}$

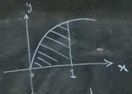
$$2\int u\sin u\,du = 2(-u\cos u+\sin u)$$
$$=2(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\sqrt{x}\,dx = 2(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

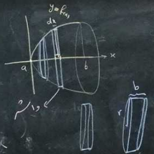
$$=2\left(-\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\cos\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}+\sin\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}-0\right)$$

کاربردهای انتگرال

مثال: حجم جسم حاصل از دوران ناحیه زیر منحنی $y=\sqrt{x}$ از ۰ تا ۱ حول محور xها را بیابید.



کاربردهای انتگرال



حجم استوانه $= \pi r^2 b$

شعاع هر استوانه: $f(x)$

ارتفاع: dx

$$\int_a^b \pi (f(x))^2\,dx$$

مثال: حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی زیر منحنی $y=\sqrt{x}$ از 0 تا 1 حول محور x ها را بیابید.

$$\int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \dots$$

مثال: مساحت زیر منحنی $y=\sqrt{x}$ را از $x=0$ تا $x=1$ بیابید:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

روش دوم محاسبهٔ حجم (روش پوسته‌های استوانه‌ای)

حجم ناحیهٔ بین دو استوانه

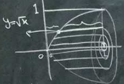
$$\pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h =$$

$$\pi h (r_2^2 - r_1^2) = \pi h \underbrace{(r_2 - r_1)}(r_1 + r_2)$$

$$= 2\pi h \Delta r \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)$$

$$r_2 - r_1 = dy$$

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = y$$



$$\int_0^1 2\pi(1-y^2)\, y\, dy$$

مثال

حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محصور به منحنی $y = 2x^2 - x^3$ و $y = 0$ را حول محور y بیابید.

$$y = 2x^2 - x^3 = x^2(2-x)$$

$$2\pi\int_0^1 (x-x^2)(2-x)\,dx = \dots\quad x=2$$

مثال

حجم حاصل از دوران ناحیه بین $y=x-x^2$

و $y=0$ حول خط $x=2$ را بیابید.

$$x^2-x=\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}$$

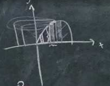
حجم ناحیه بین دو استوانه

$$\pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h =$$

$$\pi h\left(r_2^2-r_1^2\right)=\pi h\underbrace{(r_2-r_1)}(r_1+r_2)$$

$$=2\pi h\,\Delta r\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)$$

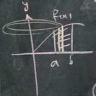
$$r \neq$$



$$\int_0^2 2\pi\left(2x^2-x^3\right)x\,dx$$

فرمول

حجم حاصل از دوران مساحت زیر منحنی $y=f(x)$ از a تا b حول محور y



$$\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

تمرین

مساحت بین سهمی‌ها $y=2x-x^2$ و $y=x^2$ را بیابید.

$$x^2=-x^2+2x$$

$$2x^2-2x=0$$

$$2x(x-1)=0$$

$$\int_0^1 \left((2x-x^2)-x^2\right)dx = \dots$$

تمرین

مساحت ناحیه محصور بین منحنی‌ها $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را از $x=0$ تا $x=\pi/2$ بیابید.

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$