توجه

$u = g(x)$

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

مثال

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\; dx$$

$u = 2x+1$

$du = 2\,dx$

$dx = \frac{du}{2}$

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx = \int_1^9 \frac{u^{\frac12}\, du}{2} = \cdots$$

تمرین

فرض کنید f تابعی پیوسته باشد. نشان دهید که برای هر $a>0$

$$\int_1^{a^2} \frac{f(\sqrt{t})}{t}\, dt = 2\int_{\frac1a}^{1} \frac1t f\left(\frac1t\right) dt$$

یادآوری

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

$t \qquad u$

تغییر متغیر $u=x$

$$2\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{f(\frac{1}{u})}{u}\,du =$$

$$2\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{f(\frac{1}{t})}{t}\,dt$$

$\frac{1}{\sqrt{t}} = u$

حل

$$\int_1^{a^2} \frac{f(\sqrt{t})}{t}\,dt =$$

$$= \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{-2f(\frac{1}{u})u^2\,du}{u^3} =$$

پاسخ

قرار دهید

$\frac{1}{\sqrt{t}} = u$, $\frac{1}{t} = u^2 \Leftarrow \sqrt{t} = \frac{1}{u}$

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow du = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{t}}}{t}\,dt = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}\,dt$$

$$\Rightarrow du = \frac{-1}{2}uu^2\,dt$$

$$dt = \frac{-du\times 2}{u^3}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} = u \\ \frac{1}{t} = u^2 \end{cases}$$

مثال: همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های ناسره زیر را بررسی کنید:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

تابع e^{-x} در هر بازه به شکل $[0,c]$ پیوسته و از این رو انتگرال‌پذیر است.

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-t}\Big|_0^x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-x}-1\right] = -1$$

بنابراین $\int_0^\infty e^{-t}\,dt$ همگراست.

تمرین

$$\int_{-\infty}^0 e^{x}\,dx$$

مثال

همگرایی یا واگرایی انتگرالهای نا سره ی زیر را بررسی کنید.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}\,dx}_{\text{یک عدد}} + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

توجه کنید که اگر $t>1$ آنگاه

$$t^2 > t$$

$$-t^2 < -t \underset{e\ \text{صعودی}}{\Longrightarrow}$$

$$e^{-t^2} < e^{-t}$$

توجه

توابع e^{-t} , e^{-t^2} در $[1,\infty)$ نامنفی هستند و پیوسته

$$\forall t \in [1,\infty) \quad e^{-t^2} \le e^{-t}$$

بنابر آزمون مقایسه اگر $\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt$ همگرا باشد آنگاه

در مثال قبل نشان دادیم که $\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt$ همگرا است.

$\int_1^{\infty} e^{-t^2}\,dt$ نیز همگرا است.

مثال

همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های نامسره زیر را بررسی کنید.

$$\int_1^{\infty} x e^{-x}\, dx$$

اولاً تابع te^{-t} در بازه‌ی $[0,c]$ پیوسته است. $c>0$

پس

$$\int_1^{\infty} te^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} te^{-t}\,dt$$

توجه

درباره‌ی $(0,+\infty)$ توابع xe^{-x} و $\frac{1}{x^2}$ نامنفی هستند.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$$

پس

بنابه آزمون مقایسه‌ی حدی اگر

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

همگرا باشد آنگاه

$$\int_1^{\infty} x e^{-x}\, dx$$

نیز همگرا است.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^{\infty} t^{-2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_1^{x} t^{-2}\,dt\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_1^x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{t}\Bigg|_1^x\right] = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}+1$$

$$=1$$

مثال

همگرایی یا واگرایی انتگرالهای ناسره زیر را بررسی کنید.

$$\int_1^\infty x^2 e^{-x}\,dx$$

توجه

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$$

توجه

در بازه $(1,+\infty)$ توابع $x^2 e^{-x}$ و $\frac{1}{x^2}$ نامنفی هستند. از آنجایی که $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ همگراست بنابه آزمون مقایسه $\int_1^\infty x^2 e^{-x}dx$ نیز همگراست.

مثال

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+x^4}\,dx$$

توجه

$$(*)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x}{1+x^4}}{e^x} = 0$$

توابع $\frac{e^x}{1+x^4}$ و e^x در $(-\infty,0)$ پیوسته و نامنفی هستند. بنابه آزمون مقایسه اگر $\int_{-\infty}^0 e^{+x}\,dx$ همگرا باشد آن گاه $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+x^4}dx$ نیز همگراست.

اثبات همگرایی این انتگرال: تمرین

از آنجایی که توابع $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{1+\ln x}$ در $[1,\infty)$ مثبت هستند، از آنجا که $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ واگراست، بنابه آزمون مقایسه $\int_1^{\infty}\frac{1}{1+\ln x}dx$ نیز واگراست.

مثال

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+\ln x}$$

راه حل اول

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\ln x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\ln x}=+\infty$$

مقایسه حدی با e^{-u} (یا $\frac{1}{u^4}$)

(بقیه را به عنوان تمرین رها می‌کنیم)

راه حل دوم

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{x}}{1+x^4}dx=-\int_{+\infty}^{0}\frac{e^{-u}}{1+u^4}du=$$

$u=-x$

$du=-dx$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1+u^4}du$$

حل . $\int^{\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$ واگرا است زیرا

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(x+1)\Big|_{\delta}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = \infty$$

پس $\int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{1+\ln x}$ نیز واگرا است.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+\ln x} = \int_{1}^{\delta} \frac{dx}{1+\ln x} + \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{1+\ln x}$$

یک عدد

$$\geq \frac{1}{1+x}$$

راه حل بعدی

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

بنابراین از یک $\delta > 0$ به بعد داریم

$$\ln x < x$$

پس $\ln x + 1 < x + 1$ و

$$\frac{1}{\ln x + 1} > \frac{1}{x+1}$$