$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{dx}{3x^2+6x+5} = \int \frac{du}{u^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{3x^2+6x+5} =$$

$$\int \frac{dx}{3(x^2+2x)+5} =$$

$$\int \frac{dx}{3\left[(x+1)^2-1\right]+5} =$$

$$\int \frac{dx}{3(x+1)^2+2}$$

$$\int \frac{du}{3u^2+2} =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+\frac{2}{3}} =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{2}\,du}{\frac{u^2}{\frac{2}{3}}+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)^2+1} =$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{(8x+5)\,dx}{4x^2+5x+3}\;-\frac{1}{4}\int\frac{1}{4x^2+5x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|4x^2+5x+3\right|$$

حل این
را بعداً درباره‌اش
صحبت می‌کنیم

$$\frac{1}{4}\int\frac{8x+4}{4x^2+5x+3}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(8x+5-1)}{4x^2+5x+3}\,dx$$

$$\int\frac{2x+1}{4x^2+5x+3}\,dx=$$

$$\int\frac{\frac{4(2x+1)}{4}}{4x^2+5x+3}\,dx=$$

$$u=4x^2+5x+3$$

$$du=(8x+5)\,dx$$

$$\int\frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$$

$$\int\frac{2x+1}{4x^2+5x+3}\,dx$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} = \dots \qquad \text{حل}$$

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

$$\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

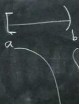
$$= \frac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \dots$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)}$$

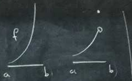
$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \qquad \text{حل}$$

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1-2x^2} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2-2x^2}$$

ادامه انتگرالهای ناسره نوع دوم



$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$$



$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

$x \to b^-$

مثال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec t\,dt$$

یادآوری

$$\int \sec t\,dt = \ln|\sec t + \tan t|$$

تابع $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ در بازه $[0, \frac{\pi}{2})$

پیوسته است ولی در نقطه $\frac{\pi}{2}$ ناپیوسته

است.

$$\int_0^{x} \sec t\,dt = \ln|\sec t + \tan t|\Big|_0^x \qquad x<\frac{\pi}{2}$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| - \underbrace{\ln|1|}_{0} = \ln|\sec x + \tan x|$$

ادامهٔ انتگرالهای ناسرهٔ نوع دوم

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln\left|\sec x + \tan x\right| = +\infty$$

بنابراین انتگرال ناسرهٔ

$$\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx$$

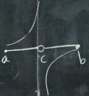
همگرا نیست.

توجه

فرض کنید تابع f در نقطهٔ

$a < c < b$

ناپیوسته باشد.



اگر $\int_a^c f(t)\,dt$ و $\int_c^b f(t)\,dt$

هر دو همگرا باشند، تعریف می‌کنیم

در این صورت

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

مثال

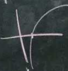
$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

تابع در این نقطه ناپیوسته است.

$$\int_0^1 \frac{1}{t-1}\,dt = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{1}{t-1}\,dt$$

$$\lim_{x\to 1^-} \ln|t-1| \Big|_0^x =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \ln|x-1| = -\infty$$



پس $\int_0^1 \frac{1}{t-1}\,dt$ همگرا نیست

بنابراین $\int_0^3 \frac{1}{t-1}\,dt$ همگرا نیست

توجه (روش اشتباه)

$$\int_0^3 \frac{1}{t-1}\,dt = \ln|t-1| \Big|_0^3 = \ln 2$$

غلط

۱. انتگرال‌های ناسرهٔ نوع اول به صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

توجه: تنها در صورتی که به ازای هر عدد a هر دو انتگرال ناسرهٔ $\int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt$ و $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$ همگرا باشند، انتگرال ناسرهٔ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ را همگرا گوییم و می‌نویسیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt+\int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt$$

مثال: $\int_{-\infty}^{\infty} \sin t\,dt$

پاسخ: $\int_{a}^{+\infty} \sin t\,dt$ را بررسی می‌کنیم.

$$\int_{a}^{+\infty} \sin t\,dt =$$

در هر بازهٔ $[a,c]$، $c>a$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{0}^{x} \sin t\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(-\cos t\Big|_{0}^{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} -\cos x+1$$

وجود ندارد.

از آنجایی که $\int_0^{+\infty} \sin t\,dt$ همگرا نیست

هم $\int_{-\infty}^{\infty} \sin t\,dt$ همگرا نیست.

روش اشتباه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin t\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} \sin t\,dt$$

توجه: تابع $\sin x$ یک تابع فرد است.

یعنی $\sin(-x) = -\sin x$

پس

$$\int_{-x}^{x} \sin t\,dt = \int_{-x}^{0} \sin t\,dt + \int_{0}^{x} \sin t\,dt = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} \sin t\,dt = 0$$

غلط

توجه

1) اگر $f(x)$ یک تابع فرد باشد

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$

2) اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

مثال

همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

را بررسی کنید.

پاسخ: بررسی $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt$

تابع $\frac{1}{1+t^2}$ در هر بازه‌ به شکل $[0,c]$ پیوسته است و از این رو انتگرال‌پذیر است.

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt \underset{\text{[illegible]}}{\overset{\text{درصورت وجود}}{=\!=}} \lim_{x\to+\infty}\boxed{\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^2}\,dt}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\tan^{-1}(t)\Big|_{0}^{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\tan^{-1}x-\tan^{-1}0\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}x = \pi/2$$

بنابراین انتگرال ناسره $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt$ همگرا به $\pi/2$ است.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\underbrace{\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt}_{\text{موجود}}$$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt$ موجود (همگرا) است.

آزمونهای مقایسه و مقایسهٔ حدی

مثال نشان دهید که $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ همگراست.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

تابع e^{-x^2} در بازهٔ $[0,1]$ پیوسته و از این رو انتگرال‌پذیر است. بنابراین $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ موجود و برابر با یک عدد است.

برای $x>1$ داریم:

$$x^2 > x$$

بنابراین

$$-x^2 < -x$$

و بنابراین

$$e^{-x^2} < e^{-x}$$

همچنین داریم:

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[-e^{-t} \Big|_1^x \right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-e^{-x} - \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

آزمون مقایسه

آیا e^{-x^2} از تابع

در بازه‌ی $[1,c]$ تابع

e^{-x} کمتر است. هر دوی این توابع نامنفی هستند.

پس از همگرایی $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ همگرایی

$\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ نتیجه می‌شود.

پس

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$$

همگرا است.

آزمون مقایسه

اگر در $[a,+\infty)$ داشته باشیم

$0 \le f(x) \le g(x)$

(1) آن‌گاه اگر $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ همگرا باشد

آن‌گاه $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ نیز همگرا است.

(2) اگر $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ واگرا باشد

آن‌گاه $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ نیز واگرا است.

مثال

همگرایی یا واگرایی انتگرال زیر را بررسی کنید.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$$

حال $\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$ واگراست (ثابت کردیم)

($\int_1^{\infty} \frac{1}{t^p}\,dt$ واگراست $p \le 1$)

برای $t>1$ داریم

$$\frac{1+e^{-t}}{t} > \frac{1}{t}$$

پس $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ واگراست.

حل همین سوال با آزمون مقایسه حدی

توابع $\frac{1+e^{-x}}{x}$ و $\frac{1}{x}$ برای $x \in [1,+\infty)$ نامنفی هستند.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1+e^{-x}}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1$$

عدد

بنابراین $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-t}}{t}\,dt$ همگراست $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$ همگرا باشد

$x \ge a$

$f(x), g(x) \ge 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

1) اگر l یک عدد مثبت باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ همگراست $\Leftrightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ همگرا باشد

2) اگر $l=0$ اگر $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ همگراست.

3) اگر $l=+\infty$ آنگاه اگر $\int_a^{+\infty} g\,dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f\,dx$ واگراست.

مثال

همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره زیر را بررسی کنید:

تابع

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+x+2}\,dx$$

$$x^3+x+2 > x^3 \to \frac{1}{x^3+x+2} < \frac{1}{x^3}$$

$x>0$

حل $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ همگراست.

پس $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x+2}$ نیز همگراست.

مقایسه حدی

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3+x+2}}{\frac{1}{x^3}} = 1$$

پس $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3}$ همگراست $\Leftrightarrow$ $\int_0^{\infty} \frac{1\,dx}{x^3+x+2}$ همگراست