تمرین

نشان دهید که

$$\sqrt{2} \le \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \le 2$$

پاسخ

نخست اکسترممهای مطلق تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ را در بازه‌ی $[-1,1]$ تعیین می‌کنیم.

تابع $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته است بنابراین دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق در این بازه است.

اکسترممهای مطلق یا در نقاط بحرانی و یا در نقاط انتهایی بازه رخ می‌دهند.

محاسبه‌ی مقدار تابع در نقاط انتهایی:

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

تعیین نقاط بحرانی

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}$$

$f'(x)$ تنها در $\underbrace{x=0}_{\text{تنها نقطه‌ی بحرانی}}$ صفر می‌شود.

تمرین

نشان دهید که

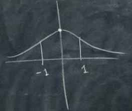
$$\sqrt{2} \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq 2$$

می‌بینیم مقدار تابع در نقطه بحرانی

$$f(0) = 1$$

ثابت کردیم که

$$\boxed{\forall x \in [-1,1] \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1}$$



توجه

اگر در بازه $[a,b]$ داشته باشیم

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

آنگاه

$$\int_a^b h(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2-4x+13}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+9}\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{9}}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\,dx$$

مثال

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+13}$$

ابتدا انتگرال نامعین زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$$

پس بنابر رابطه زیر داریم

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}}\,dx \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_{-1}^{1} 1\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \sqrt{2} \qquad\qquad \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$$

$$\boxed{\forall x \in [-1,1] \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1}$$

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a)$$

تمرین

نشان دهید که

$$\sqrt{2} \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq 2$$

یادآوری

① از تغییر متغیر $x = a\tan\theta$ زمانی استفاده می‌کنیم که در تابع ما عبارت $\sqrt{x^2+a^2}$ به کار رفته باشد.

② $\int \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(u)$

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+13} = \frac{1}{9}\int \frac{3\,du}{u^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}(u) = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right)\Big|_2^5 = \frac{1}{3}\tan^{-1}(1) - \frac{1}{3}\tan^{-1}(0)$$

$u = \frac{x-2}{3}$

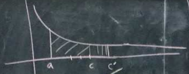
$du = \frac{1}{3}\,dx$

$dx = 3\,du$

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)$$



آن گاه تعریف می‌کنیم:

انتگرالهای ناسره نوع اول

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt\,,\ \int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$$

تعریف: فرض کنید تابع $f(x)$ برای هر $c>a$ در بازه $[a,c]$ انتگرال‌پذیر باشد.

(3)

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \to \int \frac{du}{u^2+1}$$

اگر حد سمت راست موجود (متناهی) باشد می‌گوییم

$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ انتگرال ناسره‌ی همگرا است.

مثال درباره‌ی همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره‌ی

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

بحث کنید.

(۲)۱

پاسخ تابع $\frac{1}{x}$ در بازه‌ی $[1,2]$ پیوسته و از این رو انتگرال‌پذیر است.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|\Big|_1^x = \ln|x|$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \ln|x| = +\infty$$

بنابراین انتگرال ناسره‌ی $\int_1^{\infty}\frac{1}{t}\,dt$ واگرا است.

مثال: همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره‌ی $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ را بررسی کنید.

پاسخ: تابع $\frac{1}{t^2}$ در تمام بازه‌های به صورت $[1,x]$، $x>1$ پیوسته و انتگرال‌پذیر است.

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^x t^{-2}\,dt = \left.\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^x = \left.-\frac{1}{t}\right|_1^x = -\frac{1}{x}+1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$$

نتیجه: انتگرال ناسره‌ی $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ همگرا به 1 است.

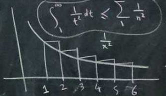
مثال: $\int_1^{\infty} e^t\,dt$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x e^t\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\left. e^t \right|_1^x \right] = \lim_{x\to+\infty} \left[e^x - e^1\right] = +\infty$$

پس انتگرال ناسره مورد نظر واگرا است.

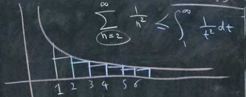
توجه ① $\pi^2/6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \le \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$



توجه 2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$$



تست انتگرال

فرض کنید f یک تابع نامنفی و نزولی و پیوسته باشد. آن گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1)+f(2)+\dots$

همگرا است اگر و تنها اگر $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ همگرا باشد.

مثال سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است

زیرا در مثال قبل نشان دادیم که $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ همگرا است

مثال: $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$

تابع e^{-x} در تمام بازه‌ها $[1,x]$ پیوسته و انتگرال‌پذیر است.

$$f(x)=\int_1^x e^{-t}\,dt$$

$$= -e^{-t}\Big|_1^x = \underbrace{-e^{-x}+e^{-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = e^{-1}$$

بنابراین انتگرال ناسره $\int_1^\infty e^{-t}\,dt$ همگرا است.

مثال: به ازای چه مقادیری از p انتگرال ناسره $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ همگرا است؟

پاسخ: نشان دادیم که برای $p=1$ انتگرال $\int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt$ واگرا است.

اگر $p \neq 1$ آنگاه

$$\int \frac{1}{t^p}\,dt = \int t^{-p}\,dt = \frac{t^{-p+1}}{-p+1}$$

بنابراین

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^p}\,dt = \frac{t^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^x = \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

برای اینکه $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ موجود باشد

باید $1-p<0$ یعنی $p>1$

پس انتگرال ناسره به شکل $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ تنها در صورتی همگراست که $p>1$.

مثال

$\int_1^{+\infty} x e^{-x}\,dx$ را محاسبه کنید.

$$\int \overset{u}{t}\,\underbrace{e^{-t}\,dt}_{dv} = \left(-t \times e^{-t}\right) + \int e^{-t}\,dt = -te^{-t} + \left(-e^{-t}\right) = e^{-t}\left(-t-1\right)$$

تابع te^{-t} در تمام بازه‌های به شکل $[1,x]$ پیوسته و انتگرال‌پذیر است.

$$F(x)=\int_1^x te^{-t}\,dt$$

$$\int_1^x te^{-t}\,dt = e^{-t}(-t-1)\Big|_1^x =$$

$$e^{-x}(-x-1)-e^{-1}(-2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} -e^{-x}x + \lim_{x\to+\infty} e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{e^x} = 0$$

قاعده هوپیتال

پس انتگرال نا سره مورد نظر همگرا است.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

تابع $f(t)=\dfrac{1}{(t+1)\ln(t+1)}$

این تابع در $t>1$ پیوسته و نزولی است

پس سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ همگرا است اگر و تنها اگر

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1\,dt}{(t+1)\ln(t+1)}$ همگرا باشد.

برای انتگرال نامعین

$u=\ln(t+1)$

$$\int \frac{dt}{(t+1)\ln(t+1)} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u|$$

$$= \ln|\ln(t+1)|$$

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{(t+1)\ln(t+1)} = \ln|\ln(t+1)|\Big|_1^x =$$

$$= \ln|\ln(x+1)| - \ln|\ln(2)|$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$$

بنابراین انتگرال ناسره $\int_1^\infty \frac{dt}{(t+1)\ln(t+1)}$ واگرا است و به تبع آن سری $\sum_1^\infty \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ واگرا است.

انتگرالهای ناسره نوع دوم

فرض کنید تابع f در بازه $[a,b)$ پیوسته و در نقطه b ناپیوسته باشد.

انتگرال ناسره $\int_a^b f(t)dt$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

در صورتی که حد سمت راست موجود باشد (متناهی باشد) می‌گوییم انتگرال ناسره $\int_a^b f(t)dt$ همگرا است.

تعریف

فرض کنید f در $(a, b]$ پیوسته باشد و در a ناپیوسته باشد.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$$

اگر حد موجود و متناهی باشد.

مثال

حل $\int_2^5 \frac{dt}{\sqrt{t-2}}$

دقت کنید که تابع زیر انتگرال در نقطه 2 پیوسته نیست.

پس انتگرال بالا، ناسره نوع دوم است.

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t-2}} = 2\sqrt{t-2}$$

$$F(x) = \int_x^5 \frac{dt}{\sqrt{t-2}} =$$

$x>2$

$$F(x) = 2\sqrt{5-2} - 2\sqrt{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2^+} F(x) = 2\sqrt{3}$$

پس انتگرال ناسره $\int_2^5 \frac{dt}{\sqrt{t-2}}$ همگرا به $2\sqrt{3}$ است.