درباره امتحان میان ترم

① همه (که دیگرشان اعتراض کرده‌اند) حق این کار را که ...
را خواهند داشت.

② یا چهارشنبه (یا پنج‌شنبه) در ساعت حضوری.

تمرین

اگر ممکن باشد مطلق تابع

$$f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}}$$

را درباره $[0,\pi]$ تعیین کنید.

پاسخ

$$f(x) = e^{\left(\frac{1}{1+\sin x}\right)\ln(1+\sin x)}$$

$1+\sin x > 0 \quad (0,\pi)$

تابع $1+\sin x$ در $(0,\pi)$ پیوسته است.

تابع $\frac{1}{1+\sin x}$ هم در $(0,\pi)$ پیوسته است.

تابع $\ln(1+\sin x)$ ترکیب دو تابع $\ln$ و $1+\sin x$ است و نیز (>0)

پس $(0,\pi)$ پیوسته است.

در نقطه‌ی $x=0$ تابع پیوسته از راست است:

$$f(0)=e^{0}=1$$

$$\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=1$$

✓

تابع در صفر از راست پیوسته است.

به طور مشابه تابع f در π از چپ پیوسته است.

بنابراین f در $[0,\pi]$ پیوسته است.

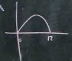
یادآوری

اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد آن گاه در این بازه دارای مینیمم و ماکزیمم مطلق است و این اکسترمم‌ها یا در انتهای بازه یا در نقاط بحرانی رخ می‌دهند.

توجه

برای تعیین اکسترمم‌های مطلق یک تابع f در یک بازه‌ی بسته $[a,b]$ نیازی به تشخیص صعودی یا نزولی بودن تابع نداریم. تنها باید مقادیر تابع را در نقاط بحرانی و نقاط انتهایی با هم مقایسه کنیم.

$$\left(\frac{-\cos x}{(1+\sin x)^2}\right)\left[-\ln(1+\sin x)+1\right] e^{\frac{1}{1+\sin x}\ln(1+\sin x)}>0$$



اگر $f'(x)=0$ آنگاه یا

$\cos x=0$

$\ln(1+\sin x)=1$ یا

$$\left(e^{g(x)}\right)'=g'(x)\,e^{g(x)}$$

میابیم نقاط بحرانی

$$f'(x)=\left[\frac{-\cos x}{(1+\sin x)^2}\ln(1+\sin x)+\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\times\frac{1}{1+\sin x}\right]\times e^{\frac{1}{1+\sin x}\ln(1+\sin x)}$$

میسنجیم مقدار تابع در نقاط انتهایی:

$f(0)=1$

$f(\pi)=1$

اما اگر بازهٔ مورد نظر از یک طرف باز باشد باید تابع را از لحاظ صعودی و نزولی بودن تحلیل کنیم

$$f(x)=e^{\frac{1}{1+\sin x}\ln(1+\sin x)}\qquad x\in[0,\pi]$$

$(\cos x = 0),\ (x \in (0,\pi)) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ نقطه بحرانی

$\ln(1+\sin x) = 1 \Rightarrow 1+\sin x = e$

و غیر ممکن است زیرا $e>2$, $\sin x<1$.

پس تنها نقطه بحرانی نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ است:

$f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$

$(1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}}$

$f(0) = f(\pi) = 1$

$f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$ برای

پس ماکزیمم مطلق تابع در نقطه $\frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد و

برابر با $\sqrt{2}$ است و مینیمم مطلق تابع در دو نقطه

انتهایی رخ می‌دهد و برابر با 1 است:

$\forall x \in [0,\pi]\quad 1 \leq (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}} \leq \sqrt{2}$

تمرین

$$\int_0^{\pi} (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}}\,dx \leqslant \sqrt{2}\,\pi$$

اولاً

$$\int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

ثانیاً اگر در بازه $[a,b]$ داشته باشیم

$$f(x) \le M$$

آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

$$= M(b-a)$$

در سوال قبل ثابت کردیم که

$$\forall x \in [0,\pi] \quad (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}} \leqslant \sqrt{2}$$

بنابراین

$$\int_0^{\pi} (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}}\,dx \le \sqrt{2}\,\pi$$