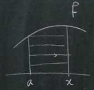
یادآوری

قضیهٔ اساسی حساب:

① $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$



② $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

مثال

فرض کنید $f(x) = \int_2^x \frac{2^t}{1+t^2}\,dt$

الف) مشتق تابع f را بیابید.

پاسخ

$f'(x) = \frac{2^x}{1+x^2}$

ب) نشان دهید تابع f وارون پذیر است و تابع وارون آن نیز مشتق پذیر است.

از آنجا که $\forall x \; f'(x) > 0$ تابع مورد نظر صعودی اکید و یک به یک است پس وارون پذیر است. از آنجا که مشتق f همواره ناصفر است f^{-1} در تمام نقاط مشتق پذیر است.

یادآوری

اگر تابع f وارون پذیر و مشتق پذیر باشد و $\forall x \; f'(x) \neq 0$ است و آن گاه f^{-1} نیز مشتق پذیر

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$y = f(x)$$

مثال

فرض کنید

$$f(x) = \int_2^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt$$

ج) $(f^{-1})'(0)$ را محاسبه کنید.

توجه

$$f(2) = 0$$

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0$$

$$\| \quad F(a) - F(a)$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{2^2}{1+2^2}}$$

مثال

$$\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$$

$\int x\tan^{-1}x$ ابتدا باید انتگرال نامعین را حساب کنیم

$$\int x\underbrace{\tan^{-1}x}_{u}\,\overbrace{dx}^{dv} = \tan^{-1}x \times \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{\tan^{-1}x\times x^2}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$\tan^{-1}x\times\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int\left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$\tan^{-1}x\times\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \tan^{-1}(x)\right)$$

تابع اولیه

$$\int \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int \sin^2(2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right) dt = \frac{1}{8}t - \frac{1}{8}\int \cos 4t\, dt$$

$$= \frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\sin(4t)$$

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$\int (\sin^2 t)\cos t \cos t\, dt =$$

$$\int \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \int (\sin t \cos t)^2 dt$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$x = \sin t \Rightarrow t = \sin^{-1}(x)$

$\sqrt{1-x^2} = \cos t$

$dx = \cos t\, dt$

$$\int_0^1 x\tan^{-1}x\, dx = F(1) - F(0) =$$

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}(1) - \frac{1}{2}(1 - \tan^{-1}1)$$

$$\int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{t}\, dt$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$$

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

مثال $(x>0)$ فرض کنید

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{t}\, dt$$

آنگاه $f'(x)$ را حساب کنید.

$$f(x)$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$= \frac{1}{8}\sin^{-1}(x) - \frac{1}{32}\sin(4\sin^{-1}x)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= F(1) - F(-1) = \cdots$$

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$G(x) = \int_1^{x^2} f(t)\,dt$$

$$G'(x) = 2x \times f(x^2)$$

$$f'(x) = -2x \times \frac{e^{x^2}}{x^2} + 3x^2 \times \frac{e^{x^3}}{x^3}$$

اولی ترکیب توابع زیر است:

$$\int_1^x \bigcirc \qquad x^2$$

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{t}\,dt = \int_{x^2}^{1} \frac{e^t}{t}\,dt + \int_1^{x^3} \frac{e^t}{t}\,dt$$

$$= -\int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt + \int_1^{x^3} \frac{e^t}{t}\,dt =$$

$$\int (\ln x)^2\,dx = (\ln x)^2 \times x - \int x \times \frac{2}{x}\ln x\,dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = x(\ln x)^2 - 2\Big[\ln x \times x - \int x \times \frac{1}{x}\,dx\Big] =$$

$$\int_1^e (\ln x)^2\,dx$$

$$\int \underbrace{(\ln x)^2}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}$$

حل

$$\big(g(f(x))\big)' = f'(x) \times g'(f(x))$$

$$= 2x \times e^{x^2+4}$$

$f(x) = x^2+4$ فرض کنید

$$g(x) = \int_2^x e^t\,dt$$

$$g(f(x)) = \int_2^{f(x)} e^t\,dt = \int_2^{x^2+4} e^t\,dt$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x = F(x)$$

$$\int_1^e (\ln x)^2\,dx = F(e) - F(1)$$

مثال

فرض کنید $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{1\,dt}{4+t^2\cosh t}$ $(x>0)$

الف) مشتق f را حساب کنید.

ب) نشان دهید f وارون پذیر است و مشتق تابع وارون را در صفر حساب کنید.

الف) $f'(x) = 3x^2 \times \frac{1}{4+(x^3)^2\cosh x^3}$

در $x=0$ تابع وارون مشتق پذیر نیست

ب) اگر $x>0$ آنگاه $f'(x)>0$. بنابراین تابع f

در $x>0$ صعودی است و وارون پذیر. از آنجا که

$\forall x\neq 0 \quad f'(x)\neq 0$

تابع وارون f نیز مشتق پذیر است:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3\times\frac{1}{4+\cosh 1}}$$

ادامه درس

قضیه مقدار میانگین برای مشتق: $\exists c \in (a,x)$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$$

فرض کنید $f(a)=0$.

$$\frac{f(x)}{x-a} = f'(c)$$

فرض کنید $g(a)=0$. $\exists d \in (a,x)$

$$\frac{g(x)}{x-a} = g'(d)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}} = \frac{f'(c)}{g'(d)}$$

$c,d \in (a,x)$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قاعده لپیتال (l'Hôpital)

فرض کنید f , g دو تابع مشتق پذیر باشند و

فرض کنید $\lim_{\substack{x\to a\\ \pm\infty}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ \pm}} g(x) = 0$

فرض کنید $\lim_{\substack{x\to a\\ \infty\\ \pm\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \begin{cases} l \\ \pm\infty \end{cases}$

آنگاه $\lim_{\substack{x\to a\\ x\to\infty\\ x\to-\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \\ \pm\infty \end{cases}$

خلاصه

اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ آن‌گاه

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

مثال

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

با استفاده از هوپیتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}$$

$=$ وجود ندارد

ادامه قاعده هوپیتال

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'}{g'}=l$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f}{g}=l$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

درجه یک مجذور صفر مشتق بگیر!

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

درجه یک مجذور صفر

مشتق بگیرید.

lim

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

مشتق بگیر!

درجه یک مجذور 1.

lim

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x} \times \frac{1}{e^{\ln x}-1}}{\cosh(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{e^{\ln x}-1} = +\infty$$

دنبال

بنا بر تعریف

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_0^{\ln x} \frac{dt}{e^t-1}}{\sinh(x-1)} = +\infty$$

مثال

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_0^{\ln x} \frac{dt}{e^t-1}}{\sinh(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

مثال

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec x \tan x \times 2\sec x}{6x} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{-2}{\ln 2x} + \frac{2x}{\ln(x^2)}}{-\frac{1}{3-x}}$$

$$= \frac{\frac{-2}{\ln 4} + \frac{4}{\ln 4}}{-1} = \frac{-2}{\ln 4}$$

$$= \left(-\int_{1/2}^{2x} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1/2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}\right)'$$

$$= -2\,\frac{1}{\ln(2x)} + 2x \times \frac{1}{\ln(x^2)}$$

$$\left(\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}\right)' =$$

$$\left(\int_{2x}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1/2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}\right)$$

$$\lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{1}{\ln(3-x)}}_{g(x)} \underbrace{\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}}_{f(x)}$$

div