انتگرال معین

یادآوری

انتگرال نامعین

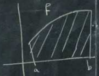
$$\int f(x)\,dx = F(x) \iff F'(x) = f(x)$$

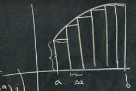
سوال طلایی

اگر $f(x)$ یک تابع پیوسته در $[a,b]$ باشد آیا تابعی مانند F وجود دارد به طوری که

$$\forall x \in (a,b) \quad F'(x) = f(x)$$

هدف: محاسبه مساحت هاشور زده شده





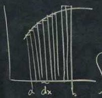
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

مساحت قسمت هاشور زده شده $\approx$ جمع مساحت مستطیل‌ها

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) \times f\left(a + \left(\frac{b-a}{n}\right) i\right)$$

بنام خدا

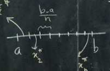
برای این که تخمین بالا بهتر شود باید $n \to \infty$.



$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \bigcirc = \text{مقدار مورد نظر}$$

تعریف

فرض کنید f یک تابع باشد که در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده است. بازه‌ی $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کنید.



از بازه‌ی iاُم عنصر x_i^* را انتخاب کنید و حاصل جمع زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

اگر حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

آن‌گاه می‌گوییم تابع f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

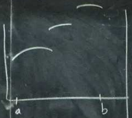
بنام خدا

و می‌نویسیم

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x}$$

قضیه

اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته (یا تعداد متناهی نقطه ناپیوستگی جهشی داشته باشد) آن گاه f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است!



توجه

اگر f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

$$\sum_{t=1}^{n} f(t_i)\Delta x = \sum_{u=1}^{n} f(u_i)\Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\dots+n$$

$$\sum_{u=1}^{n} u = 1+2+\dots+n$$

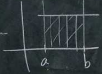
توجه

اگر تابع f در $[a,b]$ نامنفی باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{مساحت زیر تابع } f \text{ از } a \text{ تا } b$$

مثال

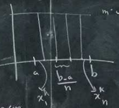
فرض کنید $f(x)=m$ یک تابع ثابت در $[a,b]$ باشد.



$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

$$m(b-a).$$

ثابت m



$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x =$$

$$m\left(\frac{b-a}{n}\right) + m\left(\frac{b-a}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \cdots m\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \times n \times m$$

$$= m(b-a)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x =$$

$$\frac{b-a}{n}$$

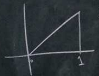
توجه

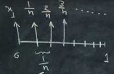
$$\int m\,dx = mx$$

$$\int_a^b m\,dx = mx(b) - mx(a) = m(b-a)$$

حل $\int_0^1 x\,dx$ را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$





نقطه اول را در هر بازه انتخاب کنید.

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \times \frac{1}{n} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \times \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2}$$

$$= \frac{0+1+2+\cdots+n-1}{n^2} = \frac{(n-1)n}{2n^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال

حاصل حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left(1+4+9+\dots+(n-1)^2\right)$$

$$= \lim \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\frac{9}{n^2}+\dots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$f(x)=x^2$

مثال

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \tan x\,dx$$

$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$

توجه

اگر در بازه‌ی $[a,b]$ داشته باشیم $f(x)\le g(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$f \le g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$ ①

② $$\int_a^b m\,dx = m(b-a)$$

به سمت

قضیه اساسی حساب (بخش اول)

فرض کنید تابع پیوسته

f داده شده باشد.

هدف: پیدا کردن تابع $F(x)$ به طوری که

$\forall x \in [a,b]$

$$F'(x) = f(x)$$

فرض کنید $x \in (a,b)$

ترکیب کنید

متغیر تابع

$$F(x) = \int_a^{x} \underline{f(t)}\,dt$$

قضیه اساسی حساب (بخش اول)

قرار دهید $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

آنگاه F در (a,b) مشتق پذیر است و

$$F'(x) = f(x)$$

نکته

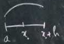
$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$$

مشتق F در نقطهٔ x_0

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$$

$$F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt$$

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$



$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

تابع f در $[a,b]$ پیوسته است.

$\exists f(u) \to$ مینیمم

$\exists f(v) \to$ ماکزیمم

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \underbrace{f(u)}_{\text{ثابت}}\,dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} \underbrace{f(v)}_{\text{عدد ثابت}}\,dt$$

خلاصهٔ قضیهٔ اساسی بخش اول

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

$$\int_x^{x+h} f(u)\,dx = f(u)\,h$$

$$\frac{f(u)h}{h} \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le \frac{f(v)h}{h}$$

$$u,v \in [x, x+h]$$

$$\int_x^{x+h} m\,dx = mh$$

$$\int_x^{x+h} f(v)\,dx = f(v)\,h$$

قضیه اساسی حساب (بخش دوم)

فرض کنید F یک تابع اولیه برای f باشد. آنگاه

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

اثبات

F یک تابع اولیه برای f است.

تابع G در زیر هم یک تابع اولیه برای f است

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

پس

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt + C$$

$$F(a)=\int_a^a f(t)\,dt + C = C$$

$$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt + C$$

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt$$

$$① \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

$$② \int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$$

$$\int \sqrt{1+\sinh^2 u}\, \cosh u\, du =$$

$$\int \cosh^2 u\, du = \int \left(\frac{1+\cosh(2u)}{2}\right) du$$

ابتدا انتگرال نامعین

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt$$

$t = \sinh u$

$dt = \cosh u\, du$

را محاسبه می‌کنیم.

سوال

$g(1)$ را محاسبه کنید.

$$g(1) = \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt}$$

مثال

فرض کنید

$$g(x) = \int_0^x \underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{f(t)}\, dt$$

آنگاه $g'(x)$ را بیابید.

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

توجه

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$$

$$\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$$

(لازم نیست c بین a و b باشد)

$u = 5t$ تغییر متغیر

$$\int_0^2 \cos(5t)\,dt = \int_0^{10} \frac{\cos(u)\,du}{5} = \frac{\sin(u)}{5}\Bigg|_0^{10}$$

$$\frac{1}{5}\sin(10)$$

$$\int_0^2 \cos(5t)\,dt = \frac{1}{5}\sin(5t)\Bigg|_0^2 =$$

$$\frac{1}{5}\sin 10 - \frac{1}{5}\sin(0)$$

مثال

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\sinh^{-1}(t) + \frac{1}{4}\sinh\left(2\sinh^{-1}(t)\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\sinh^{-1}(1) + \frac{1}{4}\sinh\left(2\sinh^{-1}(1)\right)$$

$$- 0 = \ldots$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}u + \frac{\sinh(2u)}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\sinh^{-1}(t) + \frac{\sinh\left(2\sinh^{-1}(t)\right)}{4}$$

$$= \frac{1}{2}u + \frac{\sinh(2u)}{4} + C$$

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2^4}{4}$$