قاعده لیتال در بحث توابع اولیه در کونکور نیستند.

حل چند مثال دیگر برای محاسبه انتگرال نامعین.

مثال

$$dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad (u = \ln x,\ dv)$$

$$uv - \int v\,du =$$

$$\ln x \times -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)x}\,dx$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)$$

محاسبه

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$$

توجه ① درجه صورت از درجه مخرج کمتر است.

② عبارات به کاررفته در مخرج حداکثر چند جمله‌ای درجه 2 هستند که از این بیشتر تجزیه نمی‌شوند.

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

توجه در حالت کلی

$$\frac{1}{(Ax+B)^3\,(x^2+Cx+D)^2\,(Ex+F)^2}$$

$$= \frac{a_1}{Ax+B} + \frac{a_2}{(Ax+B)^2} + \frac{a_3}{(Ax+B)^3} + \ldots$$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx =$$

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \ln|x| - \frac{\ln|1+x^2|}{2} + C$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{(-x)}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$(a+c)x^2 + bx + a = 1$$

$$a + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$b = 0$$

$$a = 1$$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{cx+b}{1+x^2}$$

$$a + ax^2 + cx^2 + bx = 1$$

$$\frac{a_4 x + a_5}{(x^2+Cx+D)} + \frac{a_6 x + a_7}{(x^2+Cx+D)^2} + \frac{a_8}{Ex+F} + \frac{a_9}{(Ex+F)^2}$$

$a = \frac{1}{2}$

$2a + c = 0 \Rightarrow c = -1$

$a + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$au^2 + 2au + 2a + bu^2 + cu = 1$

$(a+b)u^2 + (2a+c)u +$

$2a = 1$

$$\frac{1}{u(u^2+2u+2)} = \frac{a}{u} + \frac{bu+c}{u^2+2u+2}$$

$u = e^x$

$$\int \frac{du}{u(u^2+2u+2)}$$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+2e^x+2} = \int \frac{e^x\,dx}{e^x(e^{2x}+2e^x+2)}$$

$$\int \frac{u}{u^2+2u+2}\,du = \int \frac{u\,du}{(u+1)^2+1}$$

$$\int \frac{du}{u^2+2u+2} = \int \frac{du}{(u+1)^2+1} = \tan^{-1}(u+1)$$

$$\int \frac{(\frac{1}{2}u+1)\,du}{u^2+2u+2} = \int \frac{\frac{1}{2}u\,du}{u^2+2u+2} + \int \frac{du}{u^2+2u+2}$$

$$\int \frac{du}{u(u^2+2u+2)} = \frac{1}{2}\ln|u| - \int \frac{\frac{1}{2}u+1}{u^2+2u+2}\,du$$

t

$$dt = (2u+2)\,du \qquad \frac{dt}{4} = (\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{2})\,du$$

$$\frac{1}{u(u^2+2u+2)} = \frac{1}{2u} + \frac{-\frac{1}{2}u-1}{u^2+2u+2}$$

du

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x-\frac{\sin(4(\sin^{-1}x))}{8}\right)+C$$

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 2\theta=\frac{1-\cos 4\theta}{2}$$

$$\int \sin^2 2\theta\,d\theta=\int\frac{1}{2}\,d\theta-\frac{1}{2}\int\cos 4\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\theta-\frac{\sin 4\theta}{8}$$

$$\int \sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta=$$

$$\int \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$\int\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 d\theta=\frac{1}{4}\int(\sin 2\theta)^2\,d\theta$$

جای گذاری به عهده شما

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$1-x^2\geq 0\Rightarrow x\in(-1,1)$$

$$x=\sin\theta\qquad \theta=\sin^{-1}(x)$$

$$dx=\cos\theta\,d\theta$$

مثال

$$t=u+1$$

$$\int\frac{u\,du}{(u+1)^2+1}=\int\frac{(t-1)\,dt}{t^2+1}=$$

$$\int\frac{t\,dt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|-\tan^{-1}(t)$$

$\int \sin u \times u \, du =$

در جلسات قبل گفته شده است.

مثال

$$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$u = \sin^{-1} x \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$x = \sin u$

$$\int \frac{du}{u(u^2+1)}$$

انتگرال جبری گویاست

$$\frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{3x}+e^x}$$

$$= \int \frac{du}{u^3+u} \qquad u = e^x$$

$$\int \sin^{-1} u \, du =$$

در جلسات قبل گفته شده

$$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$u = \sin^{-1} x \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$x = \sin u$$

حل