سه‌شنبه ۷ مهر - تمرین ۴

تمرین 1

نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\sqrt[1]{1}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots$$

راه حل پیشرفته

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{0} = 1$$

راه حل بالا را هنوز درس نداده‌ایم!

راه حل مقدماتی

اولاً که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n}$

یعنی تمامی جملات دنباله از یک بزرگتر یا مساوی با 1 هستند. بنویسیم: $a_n = \sqrt[n]{n}$

از آنجا که $a_n \geq 1$ می‌نویسیم $a_n = 1 + b_n$ ، $b_n \geq 0$

در ادامه ثابت می‌کنیم که $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$$a_n = 1 + b_n \Rightarrow$$

$$a_n^n = (1+b_n)^n \Rightarrow$$

$$n = 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 + \cdots$$

از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که

$$\Rightarrow n \geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$$

پس $0 \leq b_n^2 \leq \dfrac{2}{n-1}$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} b_n^2 = 0$

(بنا به فشردگی)

و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

یادآوری

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots$$

$$+ \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

شنبه ۷ مهر - تمرین ۴

تمرین ۲

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$$

راه اول

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^{0} = 1$$

راه دوم

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{n}$$

فشردگی $\Rightarrow \lim \sqrt[n]{2} = 1.$

تمرین ۳ (تعمیم تمرین ۲)

فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

راه حل تمرین ۳

از آنجا که $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$

می‌دانیم که اگر $\varepsilon > 0$ یک عدد دلخواه باشد

بنا به قضیه ۲ فرزگی

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$$

از یک جمله N به بعد داریم

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$

می‌دانیم که $a>0$ پس ε را به گونه‌ای بگیریم

که $a-\varepsilon>0$. بنابراین

$$\sqrt[n]{a-\varepsilon} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a+\varepsilon}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

شنبه ۷ مهر - تمرین ۴

تمرین ۴

اگر $a \geq 1$ نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$$

$$\underset{\downarrow}{\sqrt[n]{1}} \leq \sqrt[n]{a} \leq \underset{\downarrow}{\sqrt[n]{n}} \quad (n>a)$$

$$1 \qquad 1 \qquad\qquad 1$$

تمرین ۵

اگر $0<a<1$ نشان دهید که $\sqrt[n]{a}\to 1$

$$\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \longrightarrow 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1$$

تمرین 7

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=\,?$$

تمرین 6

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n}$$

$$2=\sqrt[n]{2^n}\leq\sqrt[n]{1+2^n}\leq\sqrt[n]{2^n+2^n}=\sqrt[n]{2\times 2^n}=\sqrt[n]{2}\times 2$$

بنا به قضیه‌ی فشردگی

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n}=2$$

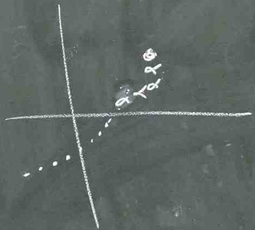
توجه: گفتیم که اگر $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ ، $a>0$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$. ثابت کنید که از این نتیجه می‌شود که اگر $\lim_{n\to\infty} b_n^n=a>0$ و $b_n\geq 0$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} b_n=1$$

شنبه ۷ مهر - تمرین ۴

تمرین 8 فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$

نشان دهید که از جائی به بعد $a_n \geq 0$



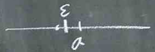
نتیجه:

یک دنباله با جملات منفی نمی‌تواند به یک عدد مثبت میل کند.

$a_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq 0$

جواب تمرین 8 می‌دانیم که $a>0$. فرض کنید $\varepsilon>0$

به گونه‌ای باشد که $a-\varepsilon>0$.

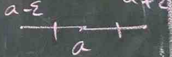


بنابر همگرایی دنباله a_n به a از جایی به بعد داریم

$0 < a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$

پس از جایی به بعد $\{a_n\}$ مثبت هستند.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \forall n>N$$



$$\underbrace{|a_n - a| < \varepsilon}$$

$$0 < a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$

تمرین ۹

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = a < 0$

از جایی به بعد جملات دنباله منفی هستند.

شنبه ۷ مهر - تمرین ۴

تمرین 10 فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = a > L$

نشان دهید که از جایی به بعد $a_n > L$.

راهنمایی) $b_n = a_n - L$ و از تمرین 18 استفاده کنید.

تمرین ۱۱ فرض کنید دنباله a_n با فرمول بازگشتی زیر داده شده باشد.

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

نشان دهید که دنباله a_n همگراست و حد آن را بیابید.

پاسخ : اثبات همگرایی

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$

$a_1 = \sqrt{2}$

$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

(تمرین : با استقرا نشان دهید که دنباله مورد نظر صعودی است)

$a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$a_4 = \dots$

دنباله مورد نظر صعودی است.

$\sqrt{2} < 2$

$\sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2$

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < \sqrt{2+2} = 2$

پس همه جملات دنباله از 2 کمترند.

یادآوری

اگر a_n صعودی و از بالا کراندار
باشد همگرا است (بنا به اصل کمال)

اگر a_n نزولی و از پایین کراندار باشد همگرا است

در نتیجه مثال قبل همگرا است.