تابع اولیه (پادمشتق)

(anti derivative)

مثال: تعیین مکان یک جسم از روی سرعت آن

$$\int v(t)\,dt = x(t) + c$$

($x(t)$ ← مکان)

تعریف

می‌گوییم F یک تابع اولیه برای f در بازهٔ I است هرگاه

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

توجه: اگر F یک تابع اولیه برای f باشد، آنگاه

نتیجه: توابع اولیه برای f از جمع F با یک تابع ثابت به دست می‌آیند.

زیرا اگر G یک تابع اولیه دیگر برای f باشد آنگاه

$$\forall x \in I \quad G'(x) = f$$

① $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

② $\forall x \in I \quad G'(x) = f(x)$

پس

③ $\forall x \in I \quad F'(x) = G'(x)$

یعنی

④ $\forall x \in I \quad F'(x) - G'(x) = 0$

⑤ $\forall x \in I \quad (F - G)'(x) = 0$

پس تابع $F-G$ یک تابع ثابت است. یعنی $F - G = c$

$$\Rightarrow F = G + c$$

اگر F یک تابع اولیه برای f باشد می‌نویسیم

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

بنابراین

فرمول [illegible]:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

آشنا

$$n \neq -1$$

① $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\left(x^{n+1}\right)' = (n+1)x^n$$

توجه: در بالا n می‌تواند یک عدد گویا باشد ولی $n \neq -1$:

② $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

③ $$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

④ $$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

⑤ $$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

⑥ $$\int \cosh x\,dx = \sinh x$$

Summe

Sum

(11) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \cosh^{-1}(x) + c$$

(12) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}(x) + c$$

(10) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sinh^{-1}(x) + c$$

(9) $$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}(x) + c$$

(8) $$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow (\cot x)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

(7) $$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

مثال

فرض کنید $f'(x)=x\sqrt{x}$ و

$f(1)=2$

آن گاه تابع $f(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ

باید $\int x\sqrt{x}\,dx$ را حساب کنیم

$$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}\,x^{\frac{3}{2}+1}$$

$$\boxed{\int x^{n}\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}}$$

بنابراین تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c$$

از آنجایی که $f(1)=2$ داریم

$$2=\frac{2}{5}+c$$

$$c=2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$$

پس

$$f(x)=\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{8}{5}$$

مثال

فرض کنید $f''(x)=12x^2+6x-4$

و $f(1)=1$, $f(0)=4$

آن گاه $f(x)$ را حساب کنید

$$\frac{4x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + cx + d$$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + cx + d$$

: d, c ?

$f(0) = 4 \Rightarrow d = 4$

$f(1) = 1 \Rightarrow c + 4 = 1 \Rightarrow c = -3$

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + d$$

$$\int f'(x)\,dx = \int (4x^3 + 3x^2 - 4x + c)\,dx$$

$$= 4\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - 4\int x\,dx + c\int 1\,dx =$$

$$12 \times \frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 4x + c = 4x^3 + 3x^2 - 4x + c$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + c$$

$$\int 12x^2 dx + \int 6x\,dx + \int (-4)\,dx$$

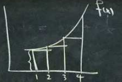
$$= 12\int x^2 dx + 6\int x\,dx - 4\int dx$$

$$f'(x) + c = \int f''(x)\,dx$$

$$\int f''(x)\,dx = \int (12x^2 + 6x - 4)\,dx$$

$$=$$

جمع مساحت مستطیل‌ها $= f(1)\times 1 + f(2)\times 1 + f(3)\times 1$



مساحت زیر منحنی سبز $\approx$ جمع مساحت مستطیل‌ها

$$\int \left(f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\right)dx = f(x)\cdot g(x) + c$$

② $\int dx = x + c$

توجه

$$\int \left(f(x)\times g(x)\right)dx \neq \int f(x)\,dx \times \int g(x)\,dx$$

پس

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

توجه

① $\int (cf + dg)\,dx = c\int f\,dx + d\int g\,dx$

$$-4\cos x+\frac{2x^5}{5}-\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C$$

حل

$$\int\left(4\sin x+\frac{2x^5-\sqrt{x}}{x}\right)dx$$

$$=4\int \sin x\,dx+\int\frac{2x^5}{x}dx-\int\frac{\sqrt{x}}{x}dx=$$

$2x^4$, $x^{-\frac{1}{2}}$

(13) $$\int e^x dx=e^x+C$$

(14) $$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

$$a^x=e^{x\ln a}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x\right)=\int_1^4 f(x)\,dx$$

مساحت تقریبی ≈ $$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\, dx =$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\; 2x\,dx =$$

$$\int \sqrt{u}\; du = \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$u = 1+x^2$$

$$du = 2x\,dx$$

پاسخ

قرار دهید

$$\int f'(u)\,du = f(u) + C$$

مثال

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\, dx$$

روش اول انتگرال گیری

تغییر متغیر

توجه

$$\int du = u + C$$

$$\int f'(t)\,dt = f(t) + C$$

$$u = f(t) \qquad du = f'(t)\,dt$$

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx$$

حل

واجب

$u = 2x+1$

$du = 2\,dx$

$$\frac{1}{a}\int \cos(u)\, du =$$

$$\frac{1}{a}\sin(u) + C = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$$

$$\boxed{\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C}$$

$$\int \cos(ax)\, dx$$

$u = ax$

$du = a\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{a}$

$$\int \cos(ax)\, dx = \int \frac{\cos(u)\, du}{a} =$$

حل

$$\int \frac{\cos(u)\, du}{4} = \frac{1}{4}\int \cos u\, du$$

$$= \frac{\sin(u)}{4} + C = \frac{\sin(x^4+2)}{4} + C$$

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx$$

حل

$u = x^4 + 2$

$du = 4x^3\, dx \Rightarrow x^3 dx = \frac{du}{4}$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du =$$

$$= -\frac{1}{8} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$-\frac{1}{8} \times 2\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$$

$$u = 1-4x^2$$

$$du = -8x\, dx$$

$$x\, dx = \frac{du}{-8}$$

مثال

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx =$$

$$\int u \times u\, du = \int u^2\, du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C = \frac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}{3} + C$$

راه حل دوم

$$u = \sqrt{2x+1}$$

$$du = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\, dx$$

$$\Rightarrow dx = \sqrt{2x+1}\, du \Rightarrow dx = u\, du$$

$$\int \frac{\sqrt{u}\, du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\, du =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\, x^5\, dx = \int \sqrt{u}\,(u-1)^2 \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\left(u^2+1-2u\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{5}{2}}du + \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du - \int u^{\frac{3}{2}}du$$

$$u = 1+x^2$$

$$du = 2x\,dx$$

$$x^2 = u-1$$

$$x\,dx = \frac{du}{2},$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\; x^5\, dx$$

$$= \int \sqrt{1+x^2}\; x^4\, x\, dx$$

$$= \int \sqrt{1+x^2}\; (x^2)^2\, x\, dx =$$

$$\frac{d\,?}{}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx = \int \frac{du}{-4} = \frac{u}{-4} =$$

$$\frac{\sqrt{1-4x^2}}{-4} + C$$

$$u = \sqrt{1-4x^2}$$

$$du = \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}\, dx$$

$$= \frac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$$

$$\int \sin\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$$

$$2\int \sin(u)\, du = -2\cos(u)+c$$

$$= -2\cos(\sqrt{x})+C$$

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\sqrt{x} = u \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\, du$$

$$du$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{5}{2}+1}\,(1+x^2)^{\frac{5}{2}+1} + \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{1}{\frac{3}{2}+1}\,(1+x^2)^{\frac{3}{2}+1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{5}{2}+1}\, u^{\frac{5}{2}+1} + \frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{1}{\frac{3}{2}+1}\, u^{\frac{3}{2}+1}$$