$$\boxed{\left(\tan^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow \left(\tan^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{1+\tan^2(a)}$$

$$\Rightarrow \left(\tan^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{1+b^2}$$

$$\arctan(x) : \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

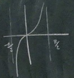
$$\tan^{-1}(x) = \arctan(x)$$

فرض کنید $b = \tan a$

$$\left(\tan^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{\tan'(a)} =$$

مثال

$$\tan x : \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$



صعودی و یک به یک

ادامه مبحث مشتق توابع معکوس

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sinh^{-1}(x)$$

$$\left(\sinh^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\left(1+\sinh^2 = \cosh^2\right)$$

ادامه مبحث مشتق توابع معکوس

مثال: نشان دهید که

(*) $\dfrac{x}{x^2+1} < \tan^{-1}(x) < x \qquad (x>0)$

پاسخ:

تابع $\tan^{-1}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

به ویژه، برای هر عدد $a>0$ این تابع در $(0,a)$ مشتق‌پذیر و در $[0,a]$ پیوسته است.

$\exists c \in \underbrace{(0,a)}$

$$\frac{\tan^{-1}(a)-\tan^{-1}(0)}{a-0} = \left(\tan^{-1}\right)'(c)$$

$$\left(\exists c\in(a,b) \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\right)$$

$c\in(0,a)$

$$\frac{\tan^{-1}(a)}{a} = \frac{1}{1+c^2}$$

$$\tan^{-1}(a) = \frac{a}{1+c^2} < a$$

$$\frac{a}{a^2+1} < \frac{a}{c^2+1} = \tan^{-1}(a)$$

$c\in(0,a)$

$$\frac{a}{a^2+1} < \frac{a}{c^2+1} = \tan^{-1}(a)$$

$c \in (0,a)$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2-\sin 0} = \frac{1}{2}$$

$f(0) = 1$

از آنجا که تابع مورد نظر یک به یک است صفر تنها نقطه‌ای است که تابع آن را به 1 می‌برد.

پاسخ

مشاهده

$f'(x) = 2 - \sin x > 0$

بنابراین تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

یعنی f^{-1} موجود و مشتق پذیر است.

تمرین

اگر $f(x) = 2x + \cos x$ آنگاه $(f^{-1})'(1)$ را محاسبه کنید.

$$\left(2xy + y'x^2\right) \times \frac{1}{1+(x^2y)^2}$$

$$= 1 + y^2 + 2yy'x$$

حل تمرین ⊛

فرض:

$$\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$$

$$\left(\tan^{-1}(x^2y)\right)' = \left(x + xy^2\right)'$$

تمرین

نشان دهید که

$$\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2\arctan(\sqrt{x}) - \pi/2$$

$$\lim_{x \to 0^+} \tan^{-1}(\ln x) = ?$$

تمرین ⊛ اگر y تابعی از x باشد و

$$\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$$

آنگاه $y'(x)$ را بیابید.

تمرین

$$y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right) \qquad y' = ?$$

$$y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad y' = ?$$

$$y = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \qquad y' = ?$$

تمرین

نشان دهید که

$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\left(\tanh^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$x \in (-1,1)$

$\tanh(a) = b$ فرض کنید

آنگاه

$\left(\tanh^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{(\tanh)'(a)}$

$= \frac{1}{1-\tanh^2(a)} = \frac{1}{1-b^2}$

ادامه بحث

$\tanh x : (-\infty,+\infty) \to (-1,1)$

$\frac{1}{2}$

$\left(\tanh^{-1}\right)(x) : (-1,1) \to (-\infty,\infty)$

$a \qquad\qquad b$

$y'\left(\frac{x^2}{1+(x^2y)^2} - 2yx\right) = \frac{-2xy}{1+(x^2y)^2} + 1 + y^2$

$y' = \frac{b}{a}$

$y = y(x)$

پاسخ

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \tanh^{-1}(x) + c$$

بنابراین ثابت کردیم:

حل $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ را به صورت دیگری می‌نویسیم

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx$$ می‌کنیم:

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{2}$$

$$\int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1-x}\,dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx\right)$$

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = ?$$

مشتق چه تابعی برابر با $\frac{1}{1-x}$ است؟

مشتق تابع $-\ln(1-x)$ برابر با $\frac{1}{1-x}$ می‌شود. پس

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x)$$

پس:

$$\cosh^{-1}(x) : (1,+\infty) \to (0,+\infty)$$

فرض کنید

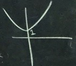
$$\cosh(a) = b$$

ادامه درس

صعودی و یک به یک

تحدید کنید:

$$\cosh(x) : (0,+\infty) \to (1,+\infty)$$



$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$$

$$= \tanh^{-1}(x)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$$

نیز داریم

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arctanh}(x) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c'$$

به طور مشابه:

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1-x}\,dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x) + \ln(1+x)\right) + c$$

تمرین

$\forall x>1 \quad \cosh^{-1}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

تمرین: اکسترمم‌های مطلق تابع $\sinh^{-1}(x^2 \ln x)$ را $[0,5]$ بیابید.

$$\left(\cosh^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad x>1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \cosh^{-1}(x) + c$$

آن گاه

$$\left(\cosh^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{(\cosh)'(a)} = \frac{1}{\sinh a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 a - 1}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-1}}$$