آدت 96

④

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

① پیوستگی و مشتق‌پذیری در صفر
② ضابطه مشتق

بررسی پیوستگی در نقطه صفر

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\times x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{1}{1}}{\frac{e^x-1}{x}}\times \overset{0}{x\sin\frac{1}{x}}=0=f(0)$$

مشتق e^x در نقطه صفر

f در صفر پیوسته است

بررسی مشتق‌پذیری در صفر

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{(e^x-1)x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{(e^x-1)}$$

حد وجود ندارد پس تابع f در صفر مشتق‌پذیر نیست.

$x=e^t$

$x\to 0^+ \Leftrightarrow t\to -\infty$

$x\to 0^-$ $\quad -e^t$, $t\to -\infty$

③ نشان دهید که $c\in(0,+\infty)$ موجود است بطوری که

$$2^c=c^c\ln c$$

حل: تابع $f(x)=2^x-x^x\ln x$ تابعی پیوسته است در $(0,+\infty)$

$f(e)=2^e-e^e<0$

$f(1)=2>0$

آنل 96

بطور خاص تابع f در $[1,e]$ پیوسته است. بنابر قضیه مقدار میانی

$$\exists c\in(1,e) \quad f(c)=0 \Longrightarrow$$

$$2^c = c^c \ln c$$

② به ازای چه مقادیری از x سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+4)^n}{5^n(n+5)}$$

همگرای مطلق، مشروط یا واگرا است؟

سری مورد نظر که یک سری توانی است: کافی است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

را حساب کنیم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(2x+4)^{n+1}}{5^{n+1}(n+6)}}{\dfrac{(2x+4)^n}{5^n(n+5)}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x+4)(n+5)}{5(n+6)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+5}{n+6}\right|\left|\frac{2x+4}{5}\right| = \left|\frac{2x+4}{5}\right|$$

$$\begin{cases}\left|\frac{2x+4}{5}\right|<1 & \Rightarrow \text{مطلقاً همگرا}\\ \left|\frac{2x+4}{5}\right|>1 & \text{واگرا}\\ \left|\frac{2x+4}{5}\right|=1 & \text{باید بررسی شود}\end{cases}$$

آذر 96

$$-1 < \frac{2x+4}{5} < 1 \Rightarrow -5 < 2x+4 < 5$$

$$\Rightarrow -9 < 2x < 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{-9}{2} < x < \frac{1}{2}}_{\text{همگرا مطلق}}$$

واگرا: $x \in (-\infty, -\frac{9}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

در نقطه $x = \frac{1}{2}$. سری تبدیل به سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5}$$

که واگرا است.

در $x = -\frac{9}{2}$ سری برابر با سری:

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+5}$$

می‌شود. که این سری همگرای مشروط است.

$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n+5} \right|$$

واگراست ولی $\sum \frac{(-1)^n}{n+5}$ بنابه آزمون لایبنیتز چون $\frac{1}{n+5}$ نزولی و همگرا به صفر است

تمرینات:

① بررسی همگرایی یا واگرایی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

جملات دنباله مثبت هستند.

آزمون ریشه:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\lim 1}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \ldots$$

. $\sum \frac{1}{n^2}$ مقایسه با . $\sum \frac{n^3}{e^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{e^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{e^n} = 0$$

. پس $\sum \frac{n^3}{e^n}$ همگرا است $\sum \frac{1}{n^2}$ همگرا است

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^3}{e^n+e^{-n}}}{\frac{n^3}{e^n}} = 2$$

. $\sum \frac{n^3}{e^n}$ (۲) پس طبق حالت حدی همگرا است

نتیجه آزمون مقایسه سری مورد نظر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\cosh n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \times 2}{(e^n+e^{-n})}$$

مقایسه با سری . $\sum \frac{n^3}{e^n}$

$$\sum \left|\frac{\tanh n}{e^n}\right|$$

$$|\tanh n| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{\tanh n}{e^n}\right| < \frac{1}{e^n}$$

$$\sum \frac{1}{e^n} = \sum \left(\frac{1}{e}\right)^n \longrightarrow$$ هندسی همگرا $\frac{1}{e}<1$

آذر 86

$= \frac{1}{e} < 1 \Longrightarrow$ نتیجه آزمون مقایسه همگرا

$$\sum \frac{\tanh n}{e^n}$$

تمرین (کاربردی از قضیه مقدار میانگین)

فرض کنید که تابع f به صورتی باشد که

$$\forall x \quad f'(x) = f(x)$$

$$f(0) = 1$$

نشان دهید که $f(x) = e^x$.

پاسخ

قرار دهید

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$$

داریم:

$$g'(x) = \frac{\overset{f(x)}{\overset{\parallel}{f'(x)}}\, e^x - e^x f(x)}{(e^x)^2}$$

پس $g'(x) = 0$.

پس $g(x)$ یک تابع ثابت c است نظیر

$$\frac{f(x)}{e^x} = c \Rightarrow f(x) = c e^x$$

محاسبه c.

$$f(0) = c e^0$$

$$\boxed{1 = c}$$

ادامه درس

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

$$\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(\sin^{-1})'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

$$(y = \sin x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

می‌بینیم مشتق تابع $\arccos(x)$

$$\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

$$\cos^{-1}(y) : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

تمرین

نشان دهید که

$$\forall x > 0 \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \sinh^{-1}(x) < x$$

$$f'(x) = 2x \times (\sin^{-1})'(x^2-1) =$$

$$2x \times \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}$$

می‌بینیم دامنه f'

دامنه:

$$(x^2-1)^2 < 1$$

$$\Downarrow$$

$$|x^2-1| < 1$$

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \Leftarrow 0 < |x| < \sqrt{2} \Leftarrow 0 < x^2 < 2$$

$$x \neq 0$$

مثال دامنه تابع f و f' را در زیر بیابید.

$$f(x) = \sin^{-1}(x^2-1)$$

تعیین دامنه f:

$$-1 \leq x^2-1 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x^2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$\left((\sin^{-1})(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1}(x) + C$$

$$(\cos^{-1} y)' = \frac{1}{(\cos x)'} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$(y=\cos x)$ $x \in [0, \pi]$

$$(\sin^{-1})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\cos^{-1}(x) + C$$

مثال

نشان دهید که

$\forall x \in (-1,1)$ $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

پاسخ

$$(\arccos x + \arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

یعنی $\arccos x + \arcsin x$ در بازه‌ی $(-1,1)$ ثابت است.

$$\arccos x + \arcsin x = C$$

برای یافتن عدد C کافی است مقدار این جمع را در نقطه $x=\frac{1}{2}$ می‌سنجیم.

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$C = \frac{\pi}{2}$

$\forall x>0\ \exists c\in(0,x)$

$$\frac{\sinh^{-1}(x)-\sinh^{-1}(0)}{x-0}=\left(\sinh^{-1}\right)'(c)$$

(قضیه مقدار میانگین)

تمرین: نشان دهید که

$$\forall x>0 \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\sinh^{-1}(x)<x$$

پاسخ: تابع $\sinh^{-1}$ تا بی‌نهایت مشتق‌پذیر است.

$\sinh^{-1}(0)=0$

$$\left(\sinh^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\sinh^{-1}(x)+c$$

$$\left(\sinh^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{(\sinh x)'}=$$

$y=\sinh(x)$

$$\frac{1}{\cosh x}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

تابع $\sinh^{-1}$

$\sinh:(-\infty,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$

$\sinh^{-1}:(-\infty,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$

$\boxed{\cosh^2-\sinh^2=1}$

تمرین: نشان دهید که

$$\forall x>0 \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \sinh^{-1}(x) < x$$

$$\frac{\sinh^{-1}(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \qquad 0<c<x$$

$$> \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{\sinh^{-1}(x)}{x} > \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \sinh^{-1}(x) > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

از آنجا که $\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} < 1$ پس

$$\frac{\sinh^{-1}(x)}{x} < 1 \Rightarrow$$

$$\sinh^{-1}(x) < x$$

پاسخ دوم: ابتدا نشان می‌دهیم که

$$\forall x>0 \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \sinh^{-1}(x)$$

تابع $g(x) = \sinh^{-1}(x) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ را در نظر بگیرید.

نشان می‌دهیم که تابع g همواره مثبت است.

و $g(0)=0$.

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}>0$$

از آنجا که $g'(x)>0$ نتیجه می‌گیریم که g در $x>0$ صعودی است.

$g(0)=0$

$x>0 \Rightarrow g(x)>g(0)=0$

$x>0 \Rightarrow g(x)>0$

فرمول مهم

$\forall x\in\mathbb{R}$

⊛ $\sinh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\sinh^{-1}(x)+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$$

اثبات ⊛

$$\left[\sinh^{-1}(x)-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\left(\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\times\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$= 0$

$\sinh^{-1}(x) - \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ برابر

$= C$

ثابت C

محاسبه C:

$x = 0 \Rightarrow C = 0$