یادآوری

اگر f در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in (a,b) \quad f'(x)=0$$

آن‌گاه f در $[a,b]$ ثابت است.

نتیجه. اگر در تمام نقاط یک بازه‌ی I

$$f'(x)=g'(x)$$

آن‌گاه

$$f=g+c$$

ثابت.

تمرین

نشان دهید که

$$\forall x>1 \quad 1-\frac{1}{x}<\ln x<x-1$$

$x-1=t$

(در نتیجه

$$\forall t>0 \quad 1-\frac{1}{t+1}<\ln(t+1)<t$$
)

پاسخ

می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\forall x>1 \quad \frac{x-1}{x}<\ln x<x-1$$

تابع $\ln x$ در $(0,+\infty)$ مشتق‌پذیر است. $\ln 1=0$

برای هر $x>1$ عنصر $c\in(1,x)$ موجود است به طوری که

$$\ln x-\ln 1=(\ln x)'(c)\,(x-1)$$

قضیه‌ی مقدار میانگین

$$f(x)-f(a)=f'(c)\,(x-a)$$

$\exists c\in(a,x)$

بنابراین

$$\ln x=\frac{1}{c}(x-1)$$

از آن‌جایی که $c\in(1,x)$ (یعنی $c>1$) داریم $\frac{1}{c}<1$ پس

$$\ln x<x-1$$

تابع f در $[a,b]$ صعودی است.

تحلیل توابع با استفاده از مشتق

	$-\infty$	c	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	صفر	$+$

$\searrow$ Min نسبی $\nearrow$

عبارت سمت راست منفی است، پس

$f(d) < f(c)$.

نتیجه (از قضیه مقدار میانگین)

اگر

$\forall x \in (a,b) \quad f'(x) > 0$

اثبات

فرض کنید $c, d \in (a,b)$ و $c < d$.

می‌خواهیم نشان دهیم که $f(c) > f(d)$

بنا به قضیه مقدار میانگین

$\exists u \quad c < u < d$

$f(d) - f(c) = f'(u)(d-c)$

منفی

نتیجه (از قضیه مقدار میانگین)

اگر در بازه (a,b) داشته باشیم

$\forall x \in (a,b) \quad f'(x) < 0$

آن‌گاه تابع f در این بازه نزولی است.

قضیه مقدار میانگین

$a < x$

$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$

$c \in (a,x)$

هم‌چنین

$\frac{1}{c} > \frac{1}{x} \Leftarrow c < x$

$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{c} > \frac{1}{x}$

نتیجه اینکه

$\ln x > \frac{x-1}{x}$

هم‌چنین

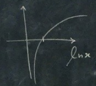
		c	
f'	+		−
	↗	[illegible]	↘

مثال: اکسترمم‌های تابع $f(x)=x^{\ln x}$ را بیابید و طرح تقریبی از تابع بکشید.

$$f(x)=e^{\ln x \ln x}=e^{(\ln x^{2})}$$

$$a^{(b^c)}\neq (a^b)^c=a^{bc}$$

دامنه تابع $(0,+\infty)$



تابع f ترکیبی از توابع مشتق‌پذیر است پس مشتق‌پذیر است.

تعیین نقاط بحرانی (نقاطی که در آن‌ها مشتق یا وجود ندارد یا برابر با صفر است)

$$f'(x)=\frac{1}{x}\times 2\ln x\times e^{(\ln x^{2})}$$

در چه نقاطی f' برابر با صفر می‌شود؟

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow \ln x=0 \Longleftrightarrow x=1$$

$x=1$ تنها نقطه بحرانی تابع f است.

$(0,+\infty)$

$$x<1 \Rightarrow \ln x<\ln 1 \Rightarrow \ln x<0 \Rightarrow f'(x)<0$$

$$x>1 \Rightarrow f'(x)>0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to -\infty} \frac{t}{e^t}$$

$$\begin{bmatrix} x = e^t \\ x\to 0^+ \Leftrightarrow t\to -\infty \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{u\to +\infty} \frac{-u}{e^{-u}} = \lim_{u\to +\infty} -u\times e^{u} = -\infty$$

سوال: آیا f در نقطه صفر پیوسته است؟

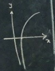
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}}$$

مثال: تابع زیر را با تحلیل مشتق رسم کنید (اکسترمم آن را پیدا کنید)

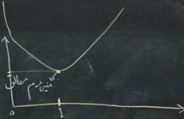
$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & x>0 \\ x^2 & x\le 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{(\ln x)^2}$$



$$x\to 0^+ \Rightarrow \ln x \to -\infty$$

$$\Rightarrow \ln^2 x \to +\infty \Rightarrow e^{\ln^2 x} \to +\infty$$



$$f(1) = 1$$

$$\underbrace{(1,1)}_{\text{مینیمم مطلق}}$$

نشان دادیم تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته است.

① بررسی مشتق پذیری در نقطه صفر

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}-1}=0$$

② $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$$

مشتق تابع x^2 در نقطه صفر

پس تابع مورد نظر در نقطه صفر مشتق پذیر است و $f'(0)=0$

ضابطه f' به صورت زیر است:

$$f'(x)=\begin{cases}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' & x>0\\ (x^2)' & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$0 \rightarrow$ با استفاده از تعریف

$$x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}\Rightarrow\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=$$

$$\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}\right)\times e^{\frac{1}{x}\ln x}=$$

$$\left(-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)\times e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\left(-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{\ln x}{x}} & x>0\\ 2x & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تعیین نقاط بحرانی تابع:

① نقطه $x=0$ بحرانی است زیرا $f'(0)=0$.

② نقاط بحرانی در بازه $(0, +\infty)$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \left(-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x}{x^2}=\frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

نقطه بحرانی

③ در بازه $(-\infty, 0)$ نقطه بحرانی نداریم.

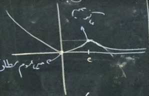
نقاط بحرانی:

$x=0$

$x=e$

$f(0)=0$

$f(e)=e^{\frac{1}{e}}$



تعیین علامت f':

$x\in(0,e) \Rightarrow f'(x)>0$

$x>e \Rightarrow f'(x)<0$

$x\in(-\infty,0) \Rightarrow f'(x)=2x<0$

توجه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = 1$$

می‌نویسیم حد.

$$\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{x}-1} = \lim_{x\to0^+} e^{(\frac{1}{x}-1)\ln x} = 0$$

مشتق تابع وارون

مشاهده اگر وارون تابع f را با f^{-1} نشان دهیم آن‌گاه

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (*)$$

با فرض این‌که توابع f و f^{-1} مشتق‌پذیرند

از دو طرف رابطهٔ * مشتق می‌گیریم

$$f'(x) \times (f^{-1})'(f(x)) = 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

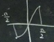
اگر تابع $f: I \to J$ یک به یک و پوشا باشد آن‌گاه وارون‌پذیر است

$$f^{-1}: J \to I$$

اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته باشد آن‌گاه f^{-1} در $f(a)$ پیوسته است.

لم) فرض کنید $f(a) = b$.
و فرض کنید تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد و $f'(a) \neq 0$.
آن‌گاه f^{-1} در $f(a) = b$ مشتق‌پذیر است و

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$



مثال تابع

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

صعودی و یک به یک است پس وارون‌پذیر است

وارون آن را با $\sin^{-1}$ یا $\arcsin$ نشان می‌دهیم.

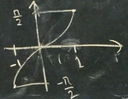
$$\arcsin: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$(y = \sin x)$

توجه: arcsin در 1 و -1
مشتق پذیر نیست

$\forall x \in (-1,1) \quad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



②

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

فرمولهای بسیار مهم

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad ①$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$