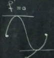
یادآوری (قضیه رول)

اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد
(a,b) مشتق پذیر باشد
$f(a)=f(b)$

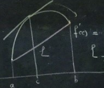
آن گاه نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ موجود است به طوری که $f'(c)=0$



قضیه مقدار میانگین برای مشتق

فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق پذیر باشد. آن گاه

$$\exists c\in(a,b) \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



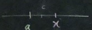
$$\text{شیب } \ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

بیان دیگر:

$$\exists c\in(a,b)$$

$$f(b)=f'(c)(b-a)+f(a)$$

فرض کنید f تابعی مشتق پذیر باشد و مقدار تابع در نقطه مرجع a دانسته باشد



$$\forall x \quad \exists c\in(a,x) \quad f(x)=f(a)+(x-a)f'(c)$$

$$\boxed{f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)}$$

اثبات قضیه مقدار میانگین

در نقطه a و b مقدار تابع برابر با مقدار تابع $g(x)$ شده است.

$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f(b) = g(b) \end{cases}$$

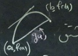
$$\begin{cases} f(a) - g(a) = 0 \\ f(b) - g(b) = 0 \end{cases}$$

سری تیلور

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$\exists c \in (a,b)$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \boxed{\frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3 \quad \text{خطا}}$$



قضیه مقدار میانگین برای مشتق

فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد. آنگاه

$$\exists c \in (a,b) \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نتیجه: در لحظه‌ای بین t_1 و t_2 سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه t_1، t_2 برابر می‌شود.

اصطلاحات عمومی

$\exists c \in (a,x)$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \boxed{\text{خطا} \quad \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2}$$

توجه (اطلاعات عمومی)

اگر تابع f را بتوان به صورت یک سری توانی نوشت آنگاه ضرایب سری مورد نظر هر کدام به صورت $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ هستند.

سری تیلور

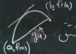
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

تمرین

سری تیلور توابع زیر را بنویسید حول نقطه 0

① $f(x) = e^x$

② $f(x) = \sin x$



قضیه مقدار میانگین برای مشتق: فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد. آنگاه

$$\exists c \in (a,b) \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$(f-g)(a) = 0$

$(f-g)(b) = 0$

فرض رول $\Rightarrow \exists c \in (a,b) \quad (f-g)'(c) = 0$

$\Rightarrow f'(c) = g'(c) \Rightarrow f'(c) =$ شیب خط

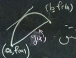
$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\square$ اثبات مقدار میانگین

مثال نشان دهید که برای $(x \in \mathbb{R})$

$$|\sin x - \sin a| \leq |x-a|$$

(در نتیجه $|\sin x| \leq |x|$).

پاسخ تابع $\sin$ یک تابع مشتق پذیر در تمامی نقاط $\mathbb{R}$ است.



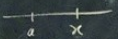
قضیه مقدار میانگین برای مشتق:

فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق پذیر باشد. آنگاه

$$\exists c \in (a,b) \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نقطه دلخواه $x \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

با قضیه مقدار میانگین



$$\exists c \in (a,x) \quad \sin x - \sin a = (\sin(x))'(c)\,(x-a)$$

$$\sin x - \sin a = \cos(c)(x-a)$$

$$\Rightarrow |\sin x - \sin a| = \underbrace{|\cos(c)|}_{\leq 1}\,|x-a|$$

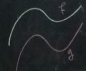
$$\Rightarrow |\sin x - \sin a| \leq |x-a|$$

مثال نشان دهید که برای هر $a, b \in \mathbb{R}$

$$|\tanh a - \tanh b| \leq |a-b| \leq |\sinh a - \sinh b|$$

۲) فرض کنید برای هر x در بازهٔ (a,b) داشته باشیم

$$f'(x) = g'(x)$$



آن گاه

$$f = g + c$$

ثابت

$$|\sinh a - \sinh b| = \underbrace{|\cosh(c')|}_{\geq 1}\,|a-b|$$

$$\Rightarrow |\sinh a - \sinh b| \geq |a-b| \;!$$

هم چنین تابع $\sinh$ در ... نقاط مشتق پذیر است

$$(\exists c' \in (a,b))$$

$$\sinh a - \sinh b = \cosh(c')(a-b)$$

می‌دانیم که $\cosh^2(c) \geq 1$ پس

$$\frac{1}{\cosh^2(c)} \leq 1$$

بنابراین

$$|\tanh b - \tanh a| = \underbrace{\left|\frac{1}{\cosh^2(c)}\right|}_{\leq 1}|b-a|$$

$$\Rightarrow |\tanh(b) - \tanh(a)| \leq |b-a|$$

پاسخ: تابع $\tanh$ در سرتاسر $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است.

فرض کنید b, a دو نقطهٔ دلخواه باشند.

$$\boxed{\exists c \in (a,b)}$$

$$\frac{\tanh b - \tanh a}{b-a} = (\tanh(x))'(c)$$

$$= \frac{1}{\cosh^2(c)}$$

ادامه اثبات قبل

③ $f-g=c$ ← ثابت

آن گاه h یک تابع ثابت است.

$$h(b)-h(a)=\underbrace{h'(c)}_{=0}(b-a)$$

$$\Rightarrow h(b)=h(a)$$

پس h یک تابع ثابت است.

اثبات:

① $\forall x\in(a,b)$ $f'(x)=g'(x)$ (فرض)

② $\forall x\in(a,b)$ $(f-g)'(x)=0$ $\Downarrow$

فرض کنید h

$\forall x\in(a,b)$ $h'(x)=0$

مثال ۱

$\int \sin x$ را حساب کنید (یعنی تمام توابعی را بیابید که مشتق آنها در نقطه x برابر با $\sin x$ شود)

$$\int \sin x = -\cos x + c$$

ثابت