تمرین

مشتق پذیری تابع زیر را در نقطهٔ صفر بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}\ln x & x>0 \\ x^2\sin\left(e^{\frac{1}{x^2+1}}\right) & x\leq 0 \end{cases}$$

پاسخ: برای بررسی مشتق پذیری تابع f در نقطهٔ صفر باید

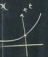
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

موجود و برابر با یک عدد

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\ln x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\ln x$$

$x^{\frac{1}{2}}\to 0$, $\ln x\to -\infty$



تغییر متغیر $x=e^t$.

$e^t\to 0^+ \Longleftrightarrow t\to -\infty$

$$\lim_{t\to -\infty} e^{\frac{t}{2}}\times t$$

تغییر متغیر $t=-u$.

$t\to -\infty \Longleftrightarrow u\to +\infty$

$$\lim_{u\to +\infty} e^{-\frac{u}{2}}\times(-u)=\lim_{u\to +\infty}\frac{-u}{e^{\frac{u}{2}}}$$

$$=\lim_{u\to +\infty}\frac{-\frac{u}{2}}{e^{\frac{u}{2}}}\times 2=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\left(e^{\frac{1}{x^2+1}}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-} x\sin\left(e^{\frac{1}{x^2+1}}\right)=0$$

(کراندار)

تمرین

مشتق‌پذیری تابع زیر را در نقطهٔ صفر بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}\ln x & x>0 \\ x^2\sin\left(e^{\frac{1}{x^2+1}}\right) & x\leq 0 \end{cases}$$

داریم

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0 \quad (*)$$

پس تابع مورد نظر ما در صفر مشتق‌پذیر است.

سوال

وقتی می‌گوییم حدهای به صورت $0\times\infty$ مبهم هستند یعنی چه؟

یعنی اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ و $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

آن گاه نمی‌توان مستقیماً درباره‌ی $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ نظر داد.

$$\lim_{n\to+\infty} n\times\frac{1}{n^2}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\times\frac{1}{n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\times\frac{1}{n}=+\infty$$

تمرین

ضابطه‌ی مشتق تابع f در تمرین قبل را بنویسید.

$$f'(x)=\begin{cases} \left(x^{\frac{3}{2}}\ln x\right)' & x>0 \\ \left(x^2\sin\left(e^{\frac{1}{1+x^2}}\right)\right)' & x<0 \\ 0 \quad \text{بنابر } (*) & x=0 \end{cases}$$

تمرین

مشتق پذیری تابع زیر را در نقطهٔ صفر بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}\ln x & x>0 \\ x^{2}\sin\left(e^{\frac{1}{x^{2}+1}}\right) & x\leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\times\ln x+\frac{1}{x}\times x^{\frac{3}{2}} & x>0 \\ \frac{-2x}{(1+x^{2})^{2}}\times e^{\frac{1}{1+x^{2}}}\times\cos\left(e^{\frac{1}{1+x^{2}}}\right)\times x^{2}+2x\sin\left(e^{\frac{1}{1+x^{2}}}\right) & x<0 \\ a & x=0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^{2}}$$

تمرین اکسترمم‌های مطلق تابع f را در بازهٔ $[0,e]$ به دست بیاورید.

پاسخ تابع f در بازهٔ $(0,e)$ پیوسته است و

$$\lim_{x\to 0^{+}}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to e}f(x)=f(e)$$

همچنین تابع f در $(0,e)$ مشتق‌پذیر است.

① محاسبهٔ مقادیر تابع در نقاط انتهایی:

$$f(0)=0$$

$$f(e)=e^{\frac{3}{2}}\times 1=e^{\frac{3}{2}}$$

② محاسبهٔ نقاط بحرانی در بازهٔ $(0,e)$

$$x>0\to f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\times\ln x+\frac{1}{x}\times x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x+x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\ln x+1\right)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0\notin(0,e) \\ \frac{3}{2}\ln x+1=0 \end{cases}$$

تمرین

مشتق پذیری تابع زیر را در نقطهٔ صفر بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}\ln x & x>0 \\ x^2 \sin\left(e^{\frac{1}{x^2+1}}\right) & x\leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\ln x+1=0 \Rightarrow \frac{3}{2}\ln x=-1 \Rightarrow$$

$$\ln x=-\frac{2}{3} \Rightarrow x=e^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$$

نقطه بحرانی ←

$$f\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)=e^{-1}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{-\frac{2}{3}}{e}<0$$

$f(0)=0$

$f(e)=e^{\frac{3}{2}} \longrightarrow$ ماکزیمم مطلق

$f\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)=\frac{-\frac{2}{3}}{e} \longrightarrow$ مینیمم مطلق

تمرین اکسترممهای مطلق توابع زیر را بیابید.

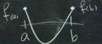
① $x^3-3x^2+1 \quad -\frac{1}{2}\leq x\leq 4$

② $x^{\frac{3}{5}}(4-x) \quad x\in[0,2]$

③ $3x^4-16x^3+18x^2 \quad -1\leq x\leq 4$

قضیه رول

فرض کنید تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد و در (a,b) مشتق پذیر باشد و $f(a)=f(b)$.



آن گاه نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ موجود است

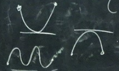
به طوری که $f'(c)=0$.

اثبات: فرض کنید تابع f در $[a,b]$ ثابت نباشد. نتیجه: f در بازه $[a,b]$

دارای ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق است.

از آنجا که $f(a)=f(b)$ تابع اکسترممی در بازه (a,b) دارد. در آن نقطه چون مشتق وجود دارد

باید مشتق صفر شود.



مثال: نشان دهید که معادله

$$3^x=\frac{1}{x^3}$$

تنها دارای یک جواب مثبت است.

پاسخ: تابع $f(x)=3^x-\frac{1}{x^3}$

را در نظر می‌گیریم.

هدف: پیدا کردن یک جواب مثبت.

1. تابع f در $(0,+\infty)$ پیوسته است.

① $f(1)=3-1=2>0$

② $f(\frac{1}{2})=\sqrt{3}-\frac{1}{\frac{1}{8}}$

$=\sqrt{3}-8<0$

تابع f در $[\frac{1}{2},1]$ پیوسته است و بنابر ①, ②

و قضیه مقدار میانی

$\exists x \in (\frac{1}{2}, 1) \quad f(x) = 0$

هدف 2 اثبات یکتایی صفر تابع f

فرض کنیم $b, a > 0$ ، $f(a) = f(b) = 0$

بنا به قضیه رل نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ موجود است

به طوری که $f'(c) = 0$.

$f'(x) = \ln 3 \times 3^x + \frac{3x^2}{x^6} =$

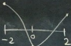
$3^x \ln 3 + \frac{3}{x^4} > 0 \longrightarrow$ هیچگاه صفر نمی‌شود.

تمرین

① نشان دهید که معادله $x + \ln x = 2$ تنها یک ریشه در $(0, +\infty)$ دارد.

② نشان دهید که معادله $\underset{f(x)=}{x e^x - 2e^x + 1 = 0}$ در $\mathbb{R}$ تنها دو جواب دارد.

پاسخ دوم



$f(-2) = -2e^{-2} - 2e^{-2} + 1 = \frac{-4}{e^2} + 1 > 0$

$f(0) = -1 < 0$

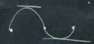
$f(2) = 2e^2 - 2e^2 + 1 = 1 > 0$

بنا به پیوستگی تابع و قضیه مقدار میانی

تابع $f(x)$ دارای یک ریشه در بازه $(-2, 0)$

و یک ریشه در بازه $(0, 2)$ است.

اگر تابع f در سه جا صفر شود



آنگاه f' در دو جا صفر می‌شود.

$$f'(x) = e^x + e^x x - 2e^x$$

$$= e^x(x-1) \Longrightarrow$$ f' تنها در یک نقطه صفر می‌شود.

تمرین

فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر

$f(0)=0$

$f(1)=1$ و باشند

$f(2)=2$

نشان دهید که

$\exists x \quad f''(x)=0$

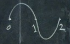
پاسخ تمرین

$g(x) = f(x) - x$

$g(0) = 0$

$g(1) = 0$

$g(2) = 0$



بنابراین $g'(x)$ حداقل دوبار برابر با صفر می‌شود.

$g'(x) = f'(x) - 1$

فرض کنیم $g'(a)=0 , g'(b)=0$

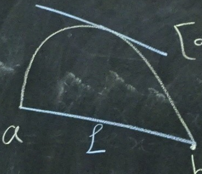
$f'(a) - 1 = f'(b) - 1 \Longrightarrow$

$f'(a) = f'(b)$

از آنجایی که تابع f' در دو نقطه صفر شده است و تابع f' مشتق‌پذیر است لذا مانند ... c وجود دارد به طوری که

$f''(c) = 0$

قضیهٔ مقدار میانگین (برای مشتق)



اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد

$$\exists c \in (a,b) \quad f'(c) = L \text{ شیب خط } = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$