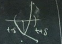
به نام خدا

یادآوری: اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد آن گاه f در این بازه دارای ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق است. ماکزیمم و مینیمم مطلق ممکن است در نقاط انتهایی بازه یا در نقطه‌ای در بازه‌ی (a,b) رخ بدهد.

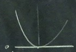
یادآوری (تعریف ماکزیمم و مینیمم نسبی)

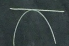
تابع f در نقطه‌ی $t \in Dom(f)$ دارای یک مینیمم نسبی است هرگاه

$$\exists \delta \Big((t-\delta, t+\delta) \subseteq Dom(f) \wedge \forall x \in (t-\delta, t+\delta) \quad f(x) \geq f(t) \Big)$$



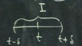
لم) فرض کنید تابع f در نقطه‌ی t دارای مینیمم نسبی (یا ماکزیمم نسبی) باشد. آن گاه یا ① f در نقطه‌ی t مشتق‌پذیر نیست یا ② f در t مشتق‌پذیر است و $f'(t)=0$.





به بیان دیگر اگر خط مماس در نقطه‌ی t وجود داشته باشد شیب آن برابر با صفر است.

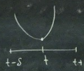
اثبات: فرض کنید نقطه‌ی t یک نقطه‌ی مینیمم نسبی باشد و $f'(t)$ موجود باشد.



$$\forall x \in I \quad f(x) \geq f(t)$$

بنام خدا

بنابراین



$\forall x \in (t, t+\delta)$ $\quad \dfrac{f(x)-f(t)}{x-t} \geq 0$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x \to t^+} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \geq 0$

$= f'_+(t)$

از طرفی

$\forall x \in (t-\delta, t)$

$\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t} \leq 0 \Rightarrow$

$\displaystyle\lim_{x \to t^-} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \leq 0$

$f'_-(t)$

از آنجا که فرض کرده‌ایم که تابع در نقطه t مشتق‌پذیر است باید داشته باشیم

$f'_+(t) = f'_-(t) = a$

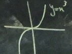
داریم $a \geq 0$ و $a \leq 0$ پس $a = 0$.

توجه الف) اگر f در t اکسترمم نسبی داشته باشد و در t مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f'(t) = 0$.

ب) اگر f در t مشتق‌پذیر باشد و $f'(t) = 0$ آنگاه لزوماً t اکسترمم نسبی نیست. برای مثال

تابع $f(x) = x^3$. داریم $f'(0) = 0$ ولی نقطه صفر

هیچ اکسترممی نیست.



(2) ممکن است f در t مشتق‌پذیر نباشد و t اکسترمم باشد.

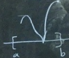
به نام خدا

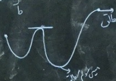
توجه (عملی برای یافتن اکسترممهای مطلق یک تابع پیوسته بر یک بازه‌ی $[a,b]$)

برای یافتن اکسترممهای مطلق تابع f پیوسته در $[a,b]$:

① نقاطی را در (a,b) بیابید که در آن مشتق وجود ندارد یا صفر می‌شود.

② مقادیر تابع را در این نقاط با مقادیر تابع در نقاط b انتهای بازه مقایسه کنید.





توجه

برای مثال تابع $\frac{1}{x}$ در $(0,1]$ در شرایط قضیه صدق نمی‌کند. ولی همین تابع در هر بازه‌ی $[a,1]$، $0<a<1$ دارای اکسترممهای مطلق است.

تمرین

بررسی کنید که آیا تابع f در نقطه‌ی صفر پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} x^x & x>0 \\ (-x)^{\sin x} & x<0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

پاسخ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^x =$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

بنام خدا

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0^-} e^{(\sin x)\ln(-x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{\sin x \ln(-x)}{x}\times x} = e^{\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}\times x\ln(-x)}$$

$$= e^{0} = 1$$

توجه: $\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = 1$

نتیجه: تابع f در نقطه صفر پیوسته است.

تمرین: آیا تابع f (مثال قبل) در نقطه صفر مشتق‌پذیر است؟

مثال: ضابطه مشتق تابع f را در $(0,+\infty)$ بیابید.

$$x>0 \Rightarrow f(x) = x^x$$

$$f(x) = x^x = e^{x\ln x} \Rightarrow f'(x) =$$

$$\left(\ln x + \frac{1}{x}\times x\right)\times e^{x\ln x} =$$

$$= (\ln x + 1)\times e^{x\ln x}$$

توجه: $(x^x)' = (\ln x + 1)x^x \quad \underline{x>0}$

تمرین: اکسترمم‌های مطلق تابع f را در $[0,e]$ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^x & x>0 \\ (-x)^{\sin x} & x<0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

به نام خدا

توجه: می‌دانیم که تابع f در $(0,e)$ پیوسته است و $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0)$ یعنی تابع f در $[0,e]$ پیوسته است. بنابراین f در این بازه دارای اکسترمم مطلق است.

① می‌یابیم مقدار تابع در نقاط انتهایی:

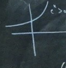
$f(0)=1$

$f(e)=e^e$

② می‌یابیم نقاط بحرانی (نقاطی که در آن‌ها مشتق وجود ندارد یا صفر است)

$$f'(x)=(\ln x+1)e^{x\ln x}$$

عبارت $e^{x\ln x}$ همواره مثبت است.



$$f'(x)=0 \Rightarrow (\ln x+1)=0$$

$$\Rightarrow \ln x=-1 \Rightarrow e^{\ln x}=e^{-1} \Rightarrow x=e^{-1}\in[0,e]$$

تنها نقطه بحرانی

مقدار تابع در نقطه $x=e^{-1}$:

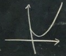
$$(e^{-1})^{e^{-1}}=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

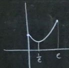
$$\frac{1}{e}<1 \Rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}<1$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}<1<e^e$$

پس ماکزیمم مطلق تابع در $x=e$ رخ می‌دهد و مقدار آن e^e است و مینیمم مطلق تابع در $\frac{1}{e}$ رخ می‌دهد و مقدار آن $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ است.

$$f(x)=\begin{cases} x^x & x>0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$





بنام خدا

تمرین

اکسترمم های مطلق تابع زیر را در [e,e] بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{x^2}} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Hyperbolic توابع هذلولوی

گفتیم که

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

تابعی غیر جبری ا

تعریف

$$\sinh x := x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cosh x := 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\boxed{\cosh x \geq 1}$$

توجه

① $$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

$$-e^{-x} = -1+x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

② $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

کاربرد

① در حل معادلات دیفرانسیل

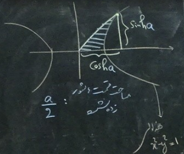
② بخش‌های حقیقی و موهومی تابع sin در اعداد مختلط

③ کاربرد $\cosh x$ در زنجیرها (قوس)

توجه: Sinh تابع فرد و Cosh تابع زوج است.

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$



$\frac{a}{2}$: مساحت قسمت هاشور زده شده

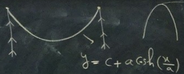
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

نقاط $(\cosh x, \sinh x)$ روی هذلولی $x^2-y^2=1$ واقع شده‌اند.

$$\cosh^2 x - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

برخلاف



$$y = c + a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

توجه:

$$\sinh x + \cosh x = e^{x}$$

بنام خدا

① توجه

$\mathrm{Dom}(\sinh x) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Dom}(\cosh x) = \mathbb{R}$

② $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر در دامنه $\mathbb{R}$ است

③ $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

④ $x > 0 \Rightarrow \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$

$x < 0 \Rightarrow \sinh x < 0$

⑤ $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 0$

⑥ $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$

$\Rightarrow \cosh^2 x \geq 1 \xRightarrow{\cosh \geq 0} \boxed{\cosh x \geq 1}$

⑦ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sinh x =$

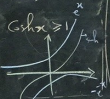
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$

⑧ $\lim\limits_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$

⑨ $\sinh(0) = 0$

⑩ $(\sinh)'(x) = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' =$

$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \geq 1$



(11) $\cosh(0) = 1$

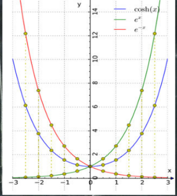
(12) $\lim_{x \to +\infty} \cosh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \cosh x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = +\infty$

(13) $(\cosh)'(x) = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$



(14) $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

این تابع در تمام نقاط پیوسته و مشتق‌پذیر است.

(15) $x > 0 \Rightarrow \tanh x > 0$

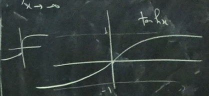
$x < 0 \Rightarrow \tanh x < 0$

$\tanh(0) = 0$

(16) $\lim_{x \to +\infty} \tanh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$

(17)

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$



(18) تابع Coth را خودتان ترسیم و تحلیل کنید.

(19)

$$(\tanh)'(x) = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{(\cosh)^2} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

(20)

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

مثال: اکسترمم مطلق تابع

$$f(x) = \tanh(x^3 - 3x^2)$$

را در بازه $[-2,3]$ بیابید.

چون تابع فوق در تمام $\mathbb{R}$ و به ویژه در $[-2,1]$ پیوسته است.

$$f'(x) = (3x^2 - 6x) \times \frac{1}{\cosh^2(x^3 - 3x^2)} \neq 0$$

$\cosh \geq 1$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

مقادیر تابع در $x=0$ ، $x=2$ ، $x=-2$, $x=3$

$x=3 \to \tanh(0)=0$, $x=-2 \to \tanh(-20)$, $x=2 \to \tanh(-4)$, $x=0 \to \tanh(0)=0$

بنام خدا

مینیمم مطلق در $x=-2$

ماکزیمم مطلق در $x=0,$ $x=3$