تمرین: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos n}$

پاسخ: داریم $n^2+\cos n \ge n^2-1$ بنابراین $\frac{1}{n^2+\cos n} \le \frac{1}{n^2-1}$

همچنین عبارت $\frac{1}{n^2+\cos n}$ برای $n \ge 2$ همواره مثبت است.

ادعا می‌کنیم که سری $\sum \frac{1}{n^2+\cos n}$ همگراست.

یادآوری: فرض کنید $0 \le a_n \le b_n$ آن‌گاه اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، $\sum a_n$ نیز همگراست.

گفتیم که جملات دنباله‌ی $\frac{1}{n^2+\cos n}$ مثبت هستند و داریم $\frac{1}{n^2+\cos n} \le \frac{1}{n^2-1}$

پس اگر نشان دهیم که سری $\sum \frac{1}{n^2-1}$ همگراست آن‌گاه بنابر آزمون مقایسه نتیجه می‌گیریم که سری مورد نظر ما نیز همگراست.

اثبات همگرایی سری $\sum \frac{1}{n^2-1}$

می‌دانیم که جملات دنباله‌ی $\frac{1}{n^2-1}$ مثبت هستند و می‌دانیم که سری $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست.

یادآوری (آزمون مقایسه‌ی حدی)

اگر $0 \le a_n, b_n$ و $\lim \frac{a_n}{b_n} = l$ (عددی مثبت) آن‌گاه $\sum a_n$ همگراست $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ همگرا باشد.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0$$

حل: بنا به [illegible] بالا سری $\sum \frac{1}{n^2-1}$ همگراست.
بنا به آزمون [illegible] سری $\sum \frac{1}{n^2+\cos n}$ همگراست.

تمرین: همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

$$\sum \frac{1}{n^2+1} \qquad \sum \frac{1}{n^2-n} \qquad \sum \frac{1}{n^2+n} \qquad \sum \frac{\sqrt[3]{n^2}+1}{n}$$

حل آخری: $\sum \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n}$

مقایسه‌ی حدی با $\sum \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}$

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$

پاسخ: داریم $\sum \frac{1}{e^n} = \sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ یک سری هندسی با قدر نسبت $r=\frac{1}{e}<1$ است و همگراست.

مثال: $\sum \frac{1}{ne^n}$

دنباله‌ی $\frac{1}{ne^n}$ دارای جملات مثبت است. هم چنین داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{ne^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

پس بر اساس از یک N به بعد جملات دنباله‌ی $\frac{1}{ne^n}$ کمتر از جملات دنباله‌ی $\frac{1}{n^2}$ هستند. بنابراین از آنجایی که $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست نتیجه می‌گیریم که $\sum \frac{1}{ne^n}$ نیز همگراست.

از مثال دیدیم که سری مورد نظر همگراست.

توجه $\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh n}$

همگراست.

مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n} - e^{-n}}$

پاسخ دقیقاً با همان روش مثال قبل.

پس سری $\sum \frac{1}{e^{n}+e^{-n}}$ همگراست.

توجه تابع زیر را تابع کسینوس هذلولوی می‌نامیم:

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

پاسخ از مثال‌های قبلی دیدیم که $\sum \frac{1}{e^{n}}$ همگراست. داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{n}+e^{-n}}}{\frac{1}{e^{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n}}{e^{n}+e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^{-2n}} = 1 \neq 0$$

توجه اگر $a_n, b_n \geq 0$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ آنگاه اگر $\sum b_n$ همگرا باشد $\sum a_n$ نیز همگراست.

مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n}+e^{-n}}$ همگراست.

مثال $\sum \frac{1}{(e^n+e^{-n})n^3}$

از آنجا که $\sum \frac{1}{n^3 e^n}$ همگراست

بنابر آزمون مقایسه حدی $\frac{1}{n^3e^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(e^n+e^{-n})n^3}}{\frac{1}{n^3e^n}} = 1$$

سری مورد نظر همگراست

دقت کنید که جملات این سری مثبت هستند.

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\cosh n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{e^n+e^{-n}}$$

اولاً دقت کنید که جملات سری بالا همگی مثبت هستند

با آزمون مقایسه حدی با $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{e^n+e^{-n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4}{e^n+e^{-n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^4}{e^n}}{1+e^{-2n}} = 0$$

یادآوری

اگر m یک عدد طبیعی باشد آنگاه

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$$

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \dots$$

راه حل دوم: مقایسه حدی

$$\sum \frac{n^2}{e^n}$$

تمرین: نشان دهید که $\sum \frac{n^5}{e^n}$ همگرا است.

تمرین

سری توانی زیر را تحلیل کنید (یعنی مشخص کنید که برای چه x هایی همگرای مطلق و برای چه x هایی همگرای مشروط و برای چه x هایی واگراست)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{5^n (n+5)}$$

تمرین m ثابت

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^m}{\cosh x} = ?$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^m}{\sinh x} = ?$$

مثال

$$\sum \frac{\tanh n}{n^2}$$

تمرین

$$\sum \frac{\tanh n}{e^n}$$

تمرین

$$\sum \frac{n^{1000}}{\cosh n}$$

پس بنا به آزمون مقایسه حدی سری مورد نظر همگراست.

توجه

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{(e^n + e^{-n}) n^2}$$

پاسخ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{e^n - e^{-n}}{(e^n + e^{-n}) n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} = 1$$

سری‌هایی که در آن‌ها متغیر به کار رفته است سری توانی می‌گوییم (نمره دقیق)

یادآوری

یادآوری آزمون نسبت فرض کنید $\sum a_n$ یک سری دلخواه است.

① اگر $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell > 1$ باشد آن‌گاه $\sum a_n$ واگرا است.

② اگر $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell < 1$ آن‌گاه $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

③ اگر $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ آن‌گاه ممکن است سری $\sum a_n$ همگرای مطلق، یا مشروط یا واگرا باشد.

تمرین

$$a_n = \frac{(2x+4)^n}{5^n(n+5)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x+4)^{n+1}}{5^{n+1}(n+6)}}{\frac{(2x+4)^n}{5^n(n+5)}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x+4)(n+5)}{5\times(n+6)}\right|$$

$$= \left|\frac{2x+4}{5}\right|$$

اگر $\left|\frac{2x+4}{5}\right| < 1 \Leftarrow$ سری مورد نظر همگرای مطلق است.

پس سری مورد نظر برای هر $x \in \left(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$ همگرای مطلق است.

برای هر $x < -\frac{9}{2}$ و $x > \frac{1}{2}$ سری مورد نظر واگرا است.

بررسی سری در $x=\frac{1}{2}$:

$$\sum a_n = \sum \frac{1}{n+5}$$

$\sum \frac{1}{n+5}$ با مقایسه حدی با $\frac{1}{n}$ واگرا است

بررسی سری در $x=-\frac{9}{2}$:

$$\sum \frac{(2x+4)^n}{5^n(n+5)}\Bigg|_{x=-\frac{9}{2}} = \sum \frac{(-1)^n}{n+5}$$

بنابر آزمون لایبنیتز ، از آنجا که $\frac{1}{n+5}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+5}=0$

سری مورد نظر در $x=-\frac{9}{2}$ همگرا است