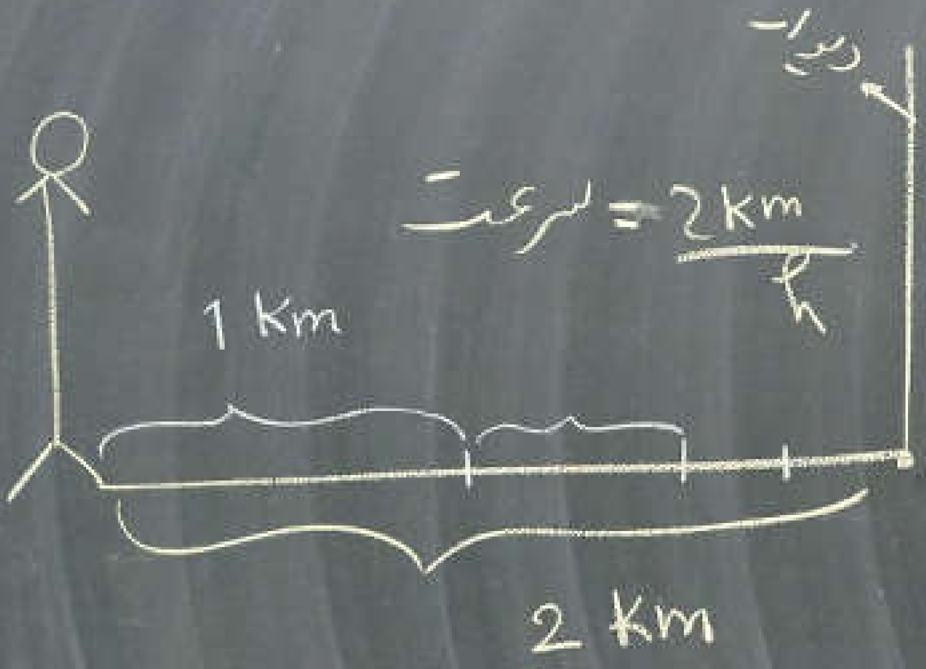
Zeno's Paradox پارادوکس زنو



یادآوری:

① سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست

② سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست $= 2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

زمان لازم برای پیمودن کل مسیر =

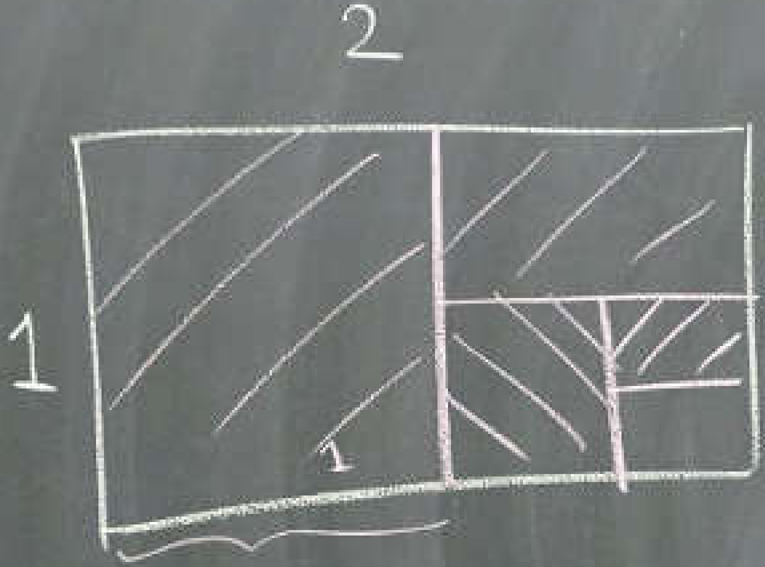
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

بیان دیگر مسئلهٔ خرگوش و

لاک پشت.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

بیان هندسی برای



$$\text{مساحت} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

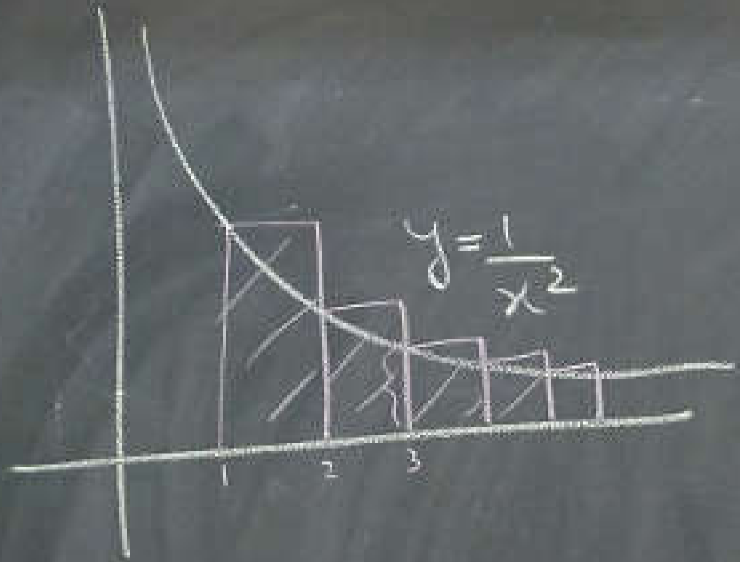
مثال در مورد همگرائی یا واگرائی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ چه نظری دارید؟

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} +$$

$$\frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} +$$

$$\frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{16^2} + \cdots \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} +$$

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{8}{8^2} + \frac{16}{16^2} + \cdots$$



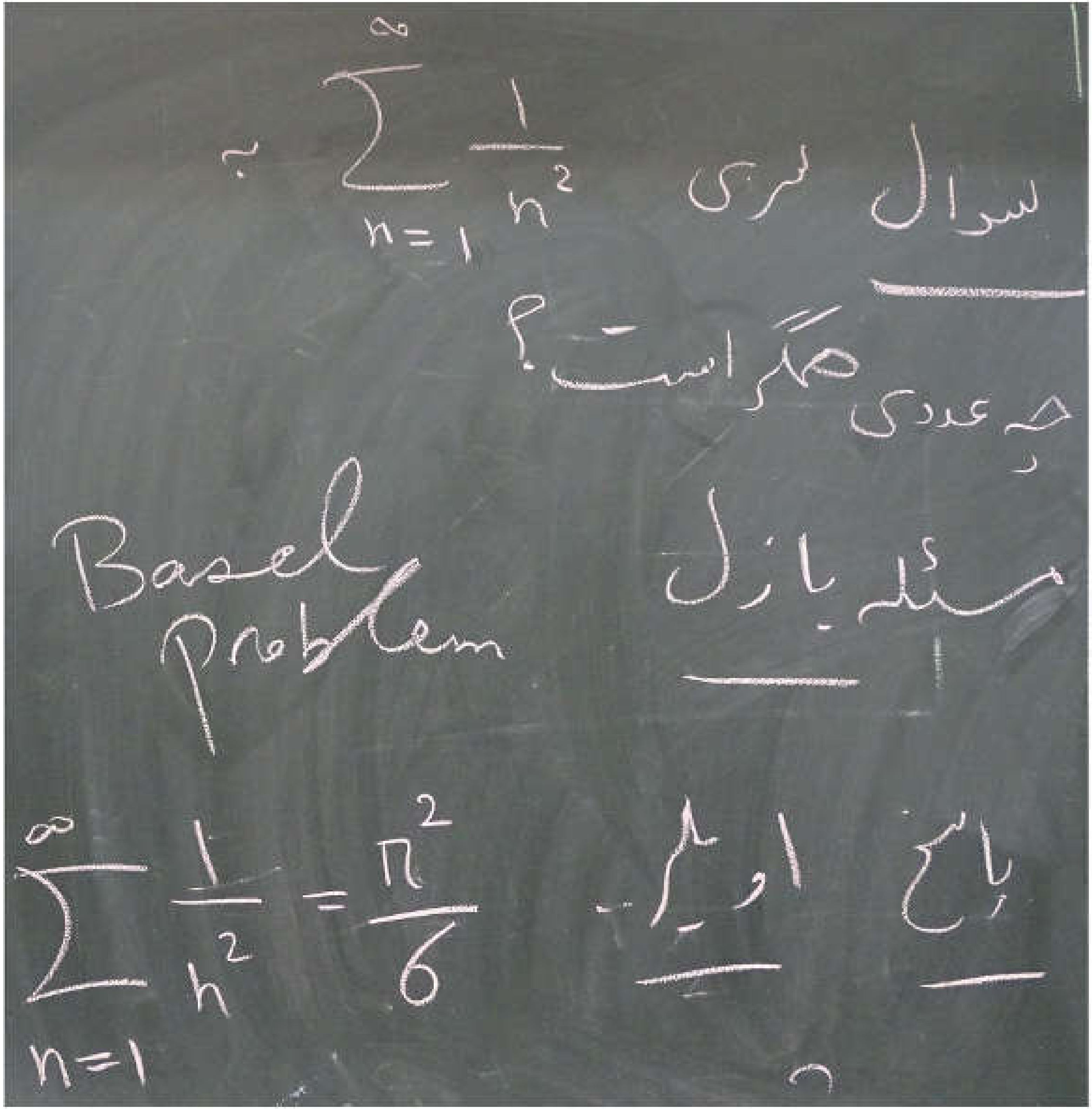
سری $\leq 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$

متناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\longrightarrow$$

همگراست.

بنابراین: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست.


سوال سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ به
چه عددی همگراست؟
مسئله بازل
Basel problem
پاسخ اویلر
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

إثبات أويلر

(بعبارة أ ب = ممكن [illegible])

① $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

② $$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$= P(x)$$

مثال ۵

فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای باشد

بطوری که $p(0)=1$ و $a_1, \dots, a_n$

ریشه‌های p باشند

$$p(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

$$= \left(\frac{x}{a_1}-1\right)a_1\,a_2\left(\frac{x}{a_2}-1\right)\left(\frac{x}{a_3}-1\right)a_3\cdots\left(\frac{x}{a_n}-1\right)a_n$$

$$p(x) = \left(\frac{x}{a_1}-1\right)\cdots\left(\frac{x}{a_n}-1\right)$$

③ $\sin x$ در $\pm k\pi$ صفر می‌شود، پس

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$

4

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

ضریب x^2 در فرمول 2 برابر با $-\frac{1}{3!}$ است

ضریب x^2 در فرمول 4:

$$-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}-\frac{1}{16\pi^2}-\cdots$$

برابر

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \quad \square$$

اثبات اویلر

تمرین: نشان دهید که

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{7^2}}\right)\cdots$$

$$= \prod_{p\ \text{اول}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}$$

تمرین فرض کنید x, y دو عدد طبیعی باشند. نشان دهید که احتمال اینکه x و y نسبت به هم اول باشند برابر $\frac{6}{\pi^2}$ است.

سوال

$$؟ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

سوال دریمان تابع زتای ریمان

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

در کجا صفر می‌شود

(سخنرانی دیروز مایکل عطیه)

Atiyah

ادامه درس

مثال درباره همگرایی یا واگرایی

سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ تحقیق کنید

$0! = 1$

اویلر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2\times 1} + \frac{1}{3\times 2\times 1} + \frac{1}{4\times 3\times 2\times 1} + \frac{1}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} + \cdots$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 2} + \frac{1}{2\times 2\times 2} + \frac{1}{2\times 2\times 2\times 2} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

مثال آیا دنباله $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ همگرا است؟

امّا

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

توجه

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

عدد نپر

توجه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots = e^a$$

اثبات (اشتباه ولی جالب)

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$= 1 + n\times\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,n^3} + \cdots$$

تمرین: با توجه به این که $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ نشان دهید.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \quad (1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^{a} \quad (2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{d}{an+b}\right)^{cn} = \quad (3 \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{N}).$$

$$= e^{\frac{cd}{a}}$$

سوال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$$

راه اول

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Downarrow$$

از آنجایی که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ همگراست

سوال

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = ?$$

$$= \lim \left(\frac{n+3-1}{n+3}\right)^n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^n = \lim \left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{n+3} \times \left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{-3}$$

$$= e^{-1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+ \cdots$$

$$a_2 - a_3$$

$$S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{n}$$

$$= 1-\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

سؤال

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} =$$

$$\left(a_n = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$$

نتیجه: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$

پس این یک اثبات دیگر برای همگرایی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ارائه کردیم.

نتیجه: $\sum_{n=0}^{K}\left(a_n - a_{n+1}\right) = a_0 - a_{K+1}$

فرض کنید $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله باشد.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ به عبارت صوری یک سری عددی گفته می‌شود.

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری باشد.

به این سری یک دنباله $\{S_n\}$ نسبت می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

می‌گوییم سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ به عدد L

همگراست هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L$$

در غیر این صورت سری مورد نظر را

واگرا می‌نامیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L \iff \lim_{n\to\infty} S_n = L$$