تمرین

همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{ne^n}$

راه حل اول: نشان می‌دهیم که سری بالا همگرای مطلق است (و در نتیجه همگرا است).

یادآوری: اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد آن‌گاه $\sum a_n$ همگرا است.

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{ne^n}$$

$$|a_n| = \frac{1}{ne^n}$$

می‌دانیم $e^n = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \dots$ یعنی $e^n > n$. پس $\frac{1}{e^n} < \frac{1}{n}$ و $\frac{1}{ne^n} < \frac{1}{n^2}$ (*)

از آنجا که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست پس بنابه آزمون مقایسه و بنابه رابطه (*) نتیجه می‌گیریم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n}$ همگراست. بنابراین

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{ne^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n} - \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2}$$

همگراست. پس $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{ne^n}$ همگراست.

راه حل دوم

تابع e^x صعودی است. تابع xe^x صعودی است $(x>0)$

$$0 \le t_1 < t_2 \Rightarrow e^{t_1} \le e^{t_2} \Rightarrow t_1 e^{t_1} \le t_2 e^{t_2}$$

بنابراین دنباله $\frac{1}{ne^n}$ یک دنباله نزولی است.

همچنین $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{ne^n} = 0$.

پس بنابه آزمون لایبنیتز سری $\sum \frac{(-1)^n}{ne^n}$ همگراست.

یادآوری: اگر $0 \le a_n$ دنباله نزولی باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ آن‌گاه سری $\sum (-1)^n a_n$ همگراست.

ب) $\sum (-1)^n \frac{1}{n\log_3^n}$

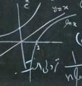
پاسخ: سری بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum (-1)^n \frac{1}{\frac{n\ln n}{\ln 3}}$$

$$\boxed{\log_3^n = \frac{\ln n}{\ln 3}}$$

از آنجا که $\ln 3$ یک عدد ثابت است کافی است همگرایی یا واگرایی سری $\sum (-1)^n \frac{1}{n\ln n}$ را بررسی کنیم.

توجه: تابع $\ln x$ ($x>0$) یک تابع صعودی است.



تابع $x\ln x$ (مشابه سوال قبل) صعودی است. پس دنباله $\frac{1}{n\ln n}$ نزولی است.

دقت کنید که $\ln n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1$

پس جملات دنباله $\frac{1}{n\ln n}$ مثبت هستند.

همچنین $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln n} = 0$ پس بنا به آزمون لایبنیتز، سری $\sum (-1)^n \frac{1}{n\ln n}$ همگرا است.

سوال: آیا سری مورد نظر این سوال همگرای مطلق است؟ به بیان دیگر آیا سری $\sum \frac{1}{n\ln n}$ همگرا است؟

توجه: برای بررسی همگرایی سری فوق، (به احتمال زیاد) هیچ کدام از آزمون‌هایی که تاکنون درس داده‌ایم جوابگو نیست.

در درس‌های آینده خواهید دید که برای بررسی همگرایی این سری می‌توان از آزمون انتگرال استفاده کرد.

(محاسبه $\int_1^\infty \frac{1}{x\ln x}dx$)

ع) $\sum n \tan\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} n\tan\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sin\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}} = 1$$

از آنجایی که جمله‌ی عمومی به صفر میل نمی‌کند، سری مورد نظر واگرا است.

توجه

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

$\boxed{y=\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

یادآوری

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آنگاه $\sum a_n$ واگرا است.

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ آنگاه

یعنی نمی‌توان نتیجه گرفت که $\sum a_n$ همگرا است.

برای مثال $\sum \frac{1}{n}$ واگرا است در حالی که $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

مثال نشان دهید که تابع زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} (e^x-1)\ln x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ |x|^{\cos x} & x<0 \end{cases}$$

پاسخ تابع f در $x>0$ پیوسته است زیرا توابع $\ln x$ و (e^x-1) پیوسته هستند و نیز حاصل‌ضرب آن‌ها نیز پیوسته است.

برای هر $x<0$ داریم $f(x) = (-x)^{\cos x}$ یعنی

$$f(x) = e^{\cos x \ln(-x)}$$

از آنجایی که اگر $x<0$ باشد $(-x)>0$ در دامنه $\ln$.

توابع $\ln$ و $\cos$ پیوسته هستند تابع $\cos x \ln(-x)$
(در دامنه)

پیوسته است، پس از آنجا که ترکیب توابع پیوسته، پیوسته است تابع $e^{\cos x \ln(-x)}$ نیز پیوسته است.

بررسی تابع در نقطه $x=0$.

برای اثبات پیوستگی تابع در نقطه $x=0$ باید نشان دهیم که

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

پیوسته

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^x - 1)\ln x =$$

$$(e^x)'(0) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \times (x \ln x) = ⊛$$

توجه: حالات مبهم به صورت زیر هستند

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \infty^0,$$

$$0^0,\ 1^\infty,\ \infty-\infty$$

توجه: $\boxed{0^\infty \text{ مبهم نیست}}$

$$⊛ = \lim_{x\to 0^+} x \ln x =$$

$$= \lim_{\substack{t\to -\infty \\ (x = e^t)}} e^t \ln(e^t)$$

$$e^x \to 0^+ \Leftrightarrow x \to -\infty$$

$$= \lim_{t\to -\infty} e^t \times t = \lim_{t\to +\infty} \frac{(-t)}{e^t} = 0$$

$\int \sin(2x) = \frac{-\cos(2x)}{2}$

$\int \frac{1}{x} = \ln|x|$

ادامه درس

در جلسه قبل دیدیم که

$(e^x)' = e^x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\cos x)' = -\sin x$

$\int e^x = e^x$

توجه (در جلسات بعد)

$\int \sin x = -\cos x$

$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x^2}}$

$x\to 0^-$

توجه

تمرین

تا این جا ثابت کردیم که $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

حال $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x)^{\cos x} = 0$

نیز از $0 = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

پس تابع f در نقطه صفر پیوسته است.

به خاطر بسپارید:

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

یادآوری

$\lim_{t\to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$

$e^t \geq 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots$

مثال: مشتق تابع $\ln|x|$ را در $x \neq 0$ بیابید.

$$f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & x>0 \\ \ln(-x) & x<0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} & x<0 \end{cases}$$

پس
$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

تمرین: ضابطه مشتق تابع $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ را بیابید.

یادآوری (حدهای مهم)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad / \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = a^x$ که در آن $a>0$ را بیابید. (مثلاً مشتق تابع 2^x)

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = \ln a \times e^{x\ln a} = \ln a \times a^x$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

مثال: $(2^x)' = 2^x \ln 2$

مثال: مشتق تابع $f(x) = x^a$ $(x>0)$ را بیابید. (مثلاً $f(x) = x^n$ ، $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ ، $f(x) = x^{\pi}$)

پاسخ

$$f(x) = x^{a} = e^{a\ln x} \quad (x>0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \times a \times e^{a\ln x} = \frac{a}{x}\, x^{a} = a x^{a-1}$$

$$(x^{n})' = n x^{n-1} \qquad \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1}$$

جبر قانون مشتق‌گیری

① $(\alpha f+\beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

(اگر f و g در نقطه‌ی x مشتق‌پذیر باشند).

② $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f(x)^{2}}$

(اگر f در x مشتق‌پذیر باشد و $f(x)\neq 0$)

③ $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

(اگر f و g در x مشتق‌پذیر باشند)

④ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^{2}}$

(اگر f و g در x مشتق‌پذیر باشند و $g(x)\neq 0$)

مشتق ترکیب توابع

⑤ $\left(f(g(x))\right)' = g'(x)\, f'(g(x))$

اگر g در x مشتق‌پذیر باشد و f در $g(x)$ مشتق‌پذیر باشد).

⑥ $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

$(f(x)=y)$

$$(\ln y)' = \frac{1}{(e^{x})'} = \frac{1}{e^{x}} = \frac{1}{y}$$

$(y=e^{x})$

مفصلاً در این باره صحبت خواهم کرد

تعریف

الف) فرض کنید تابع f در یک دامنهٔ D تعریف شده باشد.

می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $a \in D$ دارای ماکزیمم مطلق است هرگاه

$$\forall x \in D \quad f(x) \le f(a)$$

ب) می‌گوییم f در $x=a$ دارای مینیمم مطلق است هرگاه

$$\forall x \in D \quad f(x) \ge f(a)$$

توجه: در الف و ب تابع f در نقطهٔ a تعریف شده است.

ج) می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=a$ دارای ماکزیمم نسبی است هرگاه

1) تابع f در یک همسایگی $I=(a-\delta, a+\delta)$ تعریف شده باشد.

2) $\forall x \in I \quad f(x) \le f(a)$

تابع f در نقطهٔ c دارای ماکزیمم نسبی است و در b دارای ماکزیمم مطلق است. در d هم مینیمم مطلق و هم مینیمم نسبی دارد. در نقطهٔ a تابع هیچ «اکسترممی» ندارد.

د) تابع f در نقطهٔ $x=a$ دارای مینیمم نسبی است هرگاه

1) f در یک همسایگی $I=(a-\delta, a+\delta)$ تعریف شده باشد.

2) $\forall x \in I \quad f(x) \ge f(a)$

قضیه

فرض کنید تابع f در یک بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد. (یعنی در هر نقطهٔ $t\in(a,b)$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$)

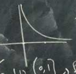
آنگاه تابع f در این بازه دارای حداقل یک ماکزیمم مطلق و یک مینیمم مطلق است.

راهنمایی برای اثبات: اگر تابع f دارای ماکزیمم مطلق نباشد باید دنبالهٔ محدودی $x_n\in[a,b]$ یافت می‌شود که $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$. اما این غیرممکن است. زیرا از آنجا که f پیوسته است باید داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(\lim_{n\to\infty} x_n) = a$$

محدود و کراندار

توجه: بسته بودن بازه هم مهم است.



$f(x)=\frac{1}{x}$

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $(0,1]$ دارای ماکزیمم مطلق نیست.

توجه: پیوستگی تابع مهم است.

مینیمم مطلق ندارد.