تمرین (از حد و پیوستگی)

عدد c را چنان بیابید که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ زیر در $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ c & x=0\end{cases}$$

پاسخ: برای این که تابع f در نقطهٔ $x=0$ پیوسته باشد کافی است

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = c$$

محاسبهٔ $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x^2}} =$$

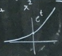
$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^2}}$$

تابع e^x تابعی پیوسته است پس

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2}}$$

محاسبهٔ $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2}$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{t\to -\infty}\frac{\ln(e^t)}{(e^t)^2} =$$



$$\lim_{t\to -\infty}\frac{t}{e^{2t}} = \lim_{u\to +\infty}(-u)e^{2u}$$

$$= \lim_{u\to +\infty} -(u e^{2u}) = -\infty$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^2}} = 0 \qquad \frac{\ln x}{x^2}\to -\infty$$

تمرین (از حد و پیوستگی)

عدد c را چنان بیابید که تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ زیر در $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

بررسی $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ به عهده شما.

راه دیگری برای محاسبهٔ $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x^2}}$

از آنجا که $x \to 0^+$ می‌توان فرض کرد که $x < \frac{1}{2}$.

پس $0 \le x^{\frac{1}{x^2}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. حد طرفین برابر

با صفر است، پس بنابر فشردگی

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x^2}} = 0$$

تمرین:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = ?$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = ?$$

1

$$\lim_{x \to 0^+} |x|^{\sin x} = ?$$

$$\lim_{x \to 0^+} |\sin x|^{x} = ?$$

$$\lim \left(\frac{1}{x^2}\right)^{x} \quad \begin{matrix} x \to +\infty & = ? \\ x \to 0 & = ? \end{matrix}$$

خلاصه جلسه قبل

(1) اگر تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در این نقطه پیوسته است.

اثبات: اگر f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0$$

پس برای هر $\varepsilon>0$ یک همسایگی $|x-a|<\delta$ یافت می‌شود که برای آن داشته باشیم

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon$$

پس در همسایگی یادشده داریم:

$$|x-a|(f'(a)-\varepsilon) \le f(x)-f(a) \le (f'(a)+\varepsilon)|x-a|$$

حد دو طرف وقتی $x\to a$ برابر با صفر است پس

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

② تابع e^x در نقطه ۰ مشتق‌پذیر است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = (e^x)'(0) = e^0 = 1$$

این حد را به خاطر بسپارید!

همچنین به راحتی می‌توان دید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} = 1$$

تمرین: پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع زیر را در نقطهٔ صفر بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

توجه: اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته نباشد در این نقطه مشتق‌پذیر هم نیست.

پاسخ تمرین | بررسی پیوستگی: این تابع در نقطه صفر پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\times x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

بررسی مشتق‌پذیری در نقطه‌ی صفر

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}}{x}=$$

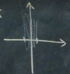
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{x}{e^x-1}\right)}_{=1}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{وجود ندارد}}\rightsquigarrow \text{وجود ندارد}$$

پس تابع مورد نظر در صفر مشتق‌پذیر نیست.

$\sin\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد

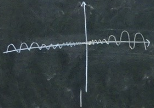


$x\sin\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

$$\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}$$

نمودار تابع



ادامه درس

لم: تابع e^x در تمام نقاط دامنه‌ی خود (یعنی در $\mathbb{R}$) مشتق‌پذیر است.

اثبات:

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^a\times e^h-e^a}{h}=$$

$$e^a\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\right)=e^a$$

خلاصه تابع e^x در تمام $a \in \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و داریم

$$(e^x)'(a) = e^a$$

به بیان دیگر

$$(e^x)' = e^x$$

لم تابع $\ln x$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln e^t}{e^t - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t-1} = 1$$

به خاطر بسپارید:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$$

نتیجه توابع $x-1$ و $\ln x$ در نزدیکی 1 شبیه هم هستند.

لم 2) تابع $\ln x$ در هر نقطهٔ $a > 0$ مشتق‌پذیر است.

اثبات:

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x-a} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to a \\ (\frac{x}{a}\to 1)}} \frac{\ln \frac{x}{a}}{a(\frac{x}{a}-1)} = \frac{1}{a} \lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1}$$

$$= \frac{1}{a} (\ln)'(1) = \frac{1}{a}$$

خلاصه

$$(\ln x)'(a)=\frac{1}{a}$$

به بیان دیگر

$$\begin{cases}(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\\[2mm](e^{x})'=e^{x}\end{cases}$$

مثال

حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)}$$

توجه: $\left(a^{b}=e^{b\ln a}\right)$

محاسبهٔ حد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{\ln(t)}{t-1}=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{1}=e$$

یادآوری

در بخش دنباله‌ها (بدون اثبات) گفتیم که

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

لم

مشتق تابع $\sin x$ را در نقطهٔ $x=0$ محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

فرمول کنکوری

فرض کنید $\lim_{x\to a}f(x)=1$ و $\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$. آنگاه

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\left(f(x)-1\right)}$$

مثال

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{\lim x\left(1+\frac{1}{x}-1\right)}=e^{1}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$ شبیه

$$\cos(2h) = \cos^2 h - \sin^2 h = 1 - 2\sin^2 h$$

$$\cos(h) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin a\left(\cos h - 1\right)}{h}$$

$$\cos a \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} =$$

لم: تابع $\sin x$ در هر نقطه $a \in \mathbb{R}$ مشتق پذیر است.

اثبات:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} =$$

$$= \lim_{x\to a} e^{\frac{g(x) \times \ln f(x)}{(f(x)-1)} \times (f(x)-1)}$$

$$\boxed{= \lim_{x\to a} e^{g(x)\left(f(x)-1\right)}}$$

اثبات فرمول کنکوری

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{\ln f(x)}{f(x)-1} = 1}$$ توجه

لم: تابع $\cos x$ در $x=0$ مشتق پذیر است.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(0+h)-\cos 0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$$

ثابت کنیم $= 0$

خلاصه

$$(\sin x)'(a)=\cos a$$

$$(\sin x)'=\cos a$$

به خاطر بسپارید:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0}$$

ادامه اثبات مشتق پذیری $\sin x$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\lim_{h\to 0}\sin a\,\frac{\cos h-1}{h}+\cos a\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\cos a$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}(-2)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}\times 2}\times\sin\frac{h}{2}=0$$