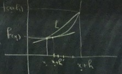
مشتق و دیفرانسیل

فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطهٔ a تعریف شده باشد. می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است هرگاه حاصل حد زیر یک عدد شود:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



شیب خط L (یعنی خط گذرا از نقاط $(x_0, f(x_0))$ و $(x_0+h, f(x_0+h))$) برابر است با:

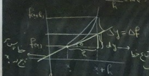
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (*)$$

دقت کنید که هرگاه h کوچک و کوچکتر شود خط گذرنده از نقاط $(x_0, f(x_0))$ و $(x_0+h, f(x_0+h))$ به خط مماس بر منحنی در نقطهٔ x_0 شبیه‌تر می‌شود. بنابراین عبارت زیر در واقع شیب خط مماس بر منحنی را در نقطهٔ x_0 نشان می‌دهد:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

وقتی که تابع f در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر باشد، در نزدیکی نقطهٔ x_0 خط مماس بر تابع تقریب مناسبی از تابع است.

$$\frac{dy}{h} = \tan\theta = f'(x_0)$$



تغییرات تابع از نقطهٔ x_0 تا نقطهٔ x_0+h:

$$\Delta y = f(x_0+h) - f(x_0)$$

تغییرات خط مماس از نقطهٔ x_0 تا x_0+h:

$$dy = f'(x_0)\underbrace{h}_{dx} = f'(x_0)\,dx$$

نکته

برای مشتق‌پذیری تابع در نقطهٔ a
باید هر دو حد زیر موجود و با هم برابر باشند:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

اقتصاد:

$C(n)$: هزینهٔ تولید n تا از یک محصول

$C(n+1) - C(n) =$ هزینهٔ تکمیل شده برای تولید یک عدد بیشتر

$$C(n+1) - C(n) = \Delta C \approx dC = C'(n) \times 1$$

فیزیک

جریان الکتریکی:

$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \Leftarrow$ تغییر متوسط بار الکتریکی نسبت به زمان

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \longrightarrow \text{جریان}$$

روش‌های دیگر نوشتن حد برای مشتق:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{dy}{dx} \Downarrow$$

نمادگذاری لایب‌نیتز

$$\boxed{dy = f'(x_0)\, dx}$$

گفتیم که اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، تغییرات تابع [illegible]
تقریب مناسبی برای تغییرات تابع است. به بیان دیگر

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\, dx$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) \approx f'(x_0)\, h \quad (\text{مفهوم دیفرانسیل [illegible]})$$

۱) اگر تابع f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در x_0 پیوسته است.

$$\underbrace{\left(\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)=0\right)}_{\Downarrow}$$ پیوسته است

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$$

مثال
مشتق تابع $f(x)=x^2$ را در نقطه $x=a$ حساب کنید.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$$

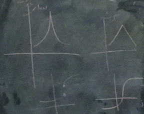
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=2a$$

به طور مشابه، مشتق تابع $f(x)=x^n$ در نقطه a برابر است با na^{n-1}

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\dots+a^{n-1}\right)}{x-a}$$

$$=na^{n-1}$$

توجه عدم مشتق‌پذیری



توابع وایراشتراس
توابعی که در همه نقاط پیوسته هستند ولی مشتق‌پذیر نیستند در هیچ نقطه

مثال نشان دهید که تابع e^x در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

حل باید حاصل حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

اگر $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ یک چندجمله‌ای باشد، آنگاه مشتق تابع $f(x)$ خود یک چندجمله‌ای است:

پس $f'(x)=a_1+2a_2x+\dots+na_nx^{n-1}$

توجه خود مشتق یک تابع است:

$$a\longmapsto f'(a)$$

قضیه) اگر توابع f, g در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه هر تابع به صورت $\alpha f+\beta g$ در نقطه a مشتق‌پذیر است و

$$(\alpha f+\beta g)'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$$

مثال مشتق تابع $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ را در نقطه $x=a$ ($a>0$) حساب کنید.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$=\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}$$

به همین ترتیب، مشتق تابع $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ در $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)=\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\sqrt[n]{a^{1-n}}$$

$$=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)-1}{x} = \frac{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}{x}$$

$$\underset{x\neq 0}{=} 1+\underbrace{\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots}_{g(x)}$$

ادعا می‌کنیم که $\lim_{x\to 0} g(x)=0$. توجه کنید که

$$g(x) = x\left(\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots\right)$$

برای اثبات این که $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ کافیست نشان دهیم

که $\lim_{x\to 0} |g(x)|=0$

دقت کنید که x به نزدیک صفر قرار دارد پس می‌توان فرض کرد که $|x|<1$. پس

$$|g(x)| \leq |x|\left(\frac{1}{2!}+\frac{|x|}{3!}+\frac{|x|^2}{4!}+\cdots\right)$$

$$\underset{|x|<1}{\leq} |x|\left(\underbrace{\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots}_{e-2}\right)$$

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots$$

با استفاده از فشردگی

$$\lim_{x\to 0} g(x)=0$$

پس

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} 1+g(x)$$

$$=1$$

تمرین: نشان دهید که اگر $\lim_{x\to a}|f(x)|=0$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)=0$.

خلاصه

$$\left(e^x\right)'(0) = e^0 = 1$$