به نام خدا

تمرین

نشان دهید که هر چندجمله‌ای از درجهٔ فرد دارای (حداقل) یک ریشه در $\mathbb{R}$ است.

توجه: این امر برای چندجمله‌ای‌های با درجهٔ زوج درست نیست.

نکته. مثال: چندجمله‌ای x^2+1 دارای هیچ ریشه‌ای

اثبات: فرض کنید $f(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+\dots+a_0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ فرد باشد. ($a_{2n+1}>0$ و a_iها اعداد حقیقی هستند.) تابع f در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

از طرفی $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (ثابت کنید)

بنابراین برای هر عدد طبیعی $N\in\mathbb{N}$ تابع $f(x)$ از جایی به بعد از N بیشتر می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \iff \forall N\in\mathbb{N}\ \exists M\in\mathbb{N}\ (x>M \to f(x)>N)$$

از طرفی $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ یعنی برای x به حد کافی منفی تابع $f(x)$ منفی می‌شود.

پس حداقل یک عدد d موجود است که $f(d)>0$.

و یک عدد c موجود است که $f(c)<0$.

از آنجا که تابع در بازهٔ $[c,d]$ پیوسته است.

بنا به قضیهٔ مقدار میانی

$$\exists x\in(c,d)\quad f(x)=0$$

ادامهٔ درس

در جلسات قبل با توابع e^x و $\ln x$ آشنا شدیم.

هر دو پیوسته‌اند. معکوس یکدیگرند.

$$\text{range}(\ln)=\text{Dom}(e^x)=\mathbb{R}$$

$$\text{Dom}(\ln)=\text{range}(e^x)=(0,+\infty)$$

$$\forall x>0\quad e^{\ln x}=x$$

به نام خدا

هدف: تعمیم مفهوم توان از اعداد طبیعی به اعداد حقیقی.

با توان‌های طبیعی در ریاضیات مقدماتی آشنا شده‌ایم:

$$a^n = \underbrace{x \times x \times x \times \dots \times x}_{n\ \text{بار}}$$

و از طرفی با $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ نیز آشنا شده‌ایم. $a>0$

پس با توان‌های گویا نیز آشنا هستیم.

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a>0$$

هدف: برای یک عدد حقیقی دلخواه r مفهوم a^r را تعریف کنیم. $a>0$

$a^{\sqrt{2}}$ $\quad a^{\pi}$ $\quad (a>0)$

تعریف: فرض کنید a,b دو عدد حقیقی دلخواه باشند که $a>0$.

تعریف می‌کنیم: $a^b := e^{b\ln a}$ $(a>0)$

توجه: اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n\ \text{بار}}$$

اثبات: فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد، $a>0$.

$$a^n \underset{\text{طبق تعریف}}{=\!=} e^{n\ln a} = e^{\ln(\overbrace{a\times a\times \dots \times a}^{n})} =$$

$$\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{\text{بار}}$$

توجه: به توابع صورت a^x $(a>0)$ تابع نمایی گفته می‌شود.

برای مثال توابع 2^x، e^x یا π^x یا $(\frac{1}{5})^x$ توابع نمایی هستند.

تحلیل تابع 2^x.

$$2^x = e^{x\ln 2}$$

دامنه‌ی این تابع: $(-\infty,+\infty)$

برد این تابع = برد تابع e^x = $(0,+\infty)$

به نام خدا

– تابع 2^x صعودی است:

توجه: $2>1 \Rightarrow \ln 2 > \ln 1 = 0$

حال اگر $x_1<x_2$ آنگاه $x_1 \ln 2 < x_2 \ln 2$

هم چنین از آنجا که تابع e^x صعودی است داریم

$$e^{x_1 \ln 2} < e^{x_2 \ln 2} \Rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2}$$

پس ثابت کردیم که اگر $x_1<x_2$ آنگاه $2^{x_1}<2^{x_2}$.

یعنی تابع 2^x صعودی است.

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x \overbrace{\ln 2}^{>0}} = +\infty$$

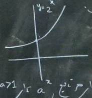
$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln 2} = 0$$

$$2^0 = e^{0\ln 2} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{x\ln 2}} =$$

$$\left(x=\frac{y}{\ln 2}\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{y^n}{(\ln 2)^n e^y} = 0$$

بنابراین رفتار تابع 2^x بسیار شبیه رفتار تابع e^x است.



توجه: مطالب بالا برای هر تابع a^x برای $a>1$ برقرار است.

تحلیل تابع $y=\left(\frac12\right)^x$

$$\left(\frac12\right)^x = e^{x\ln\frac12}$$

دامنه: $(-\infty,+\infty)$

برد: $(0,+\infty)$

– تابع $\left(\frac12\right)^x$ نزولی است. زیرا اگر $x_1<x_2$ آنگاه

$$\overbrace{\ln\tfrac12}^{\text{عددی منفی}} x_1 > \ln\tfrac12\, x_2$$

$$\left(\tfrac12 < 1 \Rightarrow \ln\tfrac12 < \ln 1 = 0\right)$$

پس $e^{\ln\frac12 x_1} > e^{\ln\frac12 x_2}$ یعنی $\frac12^{x_1} > \frac12^{x_2}$

یعنی تابع $\frac12^x$ نزولی است.

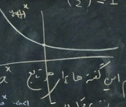
به نام خدا

توجه: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$

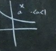
پس $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2^x} = +\infty$

$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$



مشابه تمام این گفته ها برای هر تابع a^x برای $0<a<1$ نیز برقرار است.



توجه

گفتیم که تابع 2^x تابعی صعودی است اکیداً

این تابع همچنین پیوسته است

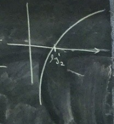
$2^x = e^{x\ln 2}$ (زیرا ترکیبی از توابع پیوسته است)

بنابراین تابع وارون آن نیز موجود، پیوسته و اکیداً صعودی است. وارون این تابع را با $\log_2^x$ نشان میدهیم:

$\log_2^x : (0,+\infty) \to (-\infty,\infty)$

توجه

$\log_2^x = \frac{\ln x}{\ln 2}$



بنام خدا

برای این که ثابت کنیم که $\log_2^x = \frac{\ln x}{\ln 2}$

باید ثابت کنیم که

$$2^{\frac{\ln x}{\ln 2}} = x$$

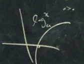
$$\| $$

$$e^{\frac{\ln x}{\ln 2} \times \ln 2} = e^{\ln x} = x$$

توجه

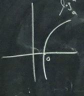
$$\log_2^x = y \Leftrightarrow 2^y = x$$

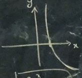
توجه بطور مشابه، تابع صعودی $\log_a^x$ ، $a>1$ تعریف می‌شود.



به طور مشابه از آنجایی که تابع $(\frac{1}{2})^x$ اکیداً نزولی و پیوسته است، تابع وارون آن، یعنی $\log_{\frac{1}{2}}^x$ پیوسته و اکیداً نزولی است. (مشابهاً $\log_a^x$ ، $0<a<1$ نزولی است)

$$\log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$$





$\boxed{\log_a^x\ 0<a<1}$

تمرین نشان دهید که

$$\exists x \quad 2^x + 3^x = x^2 + x^3$$

راهنمایی: بازهٔ $[2,3]$ را در نظر بگیرید و از قضیهٔ مقدار میانی استفاده کنید.

بنام خدا

بررسی تابع $f(x)=x^x$

$x^x = e^{x\ln x}$

دامنه: $(0,+\infty)$.

مقدار: $f(1)=1$

تابع x^x در تمام دامنه خود پیوسته است.

زیرا ترکیب توابع پیوسته است.

$$\lim_{x\to+\infty} x^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} = ?$$

ابتدا حد زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{t\to-\infty} e^t \ln e^t$$

$x = e^t$

$(t\to-\infty \Leftrightarrow e^t\to0^+)$

پس

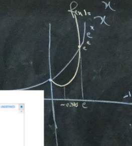
$$= \lim_{t\to-\infty} e^t \times t = \lim_{u\to+\infty} e^{-u}\times(-u)$$

$$= \lim_{u\to+\infty} \frac{-u}{e^u} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

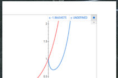
به نام خدا

بررسی تابع



$e^e = e^e$

یعنی نمودار x^x نمودار e^x را قطع می‌کند.



تمرین

نشان دهید که تابع زیر در $\mathbb{R}$ پیوسته است

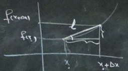
$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

مبحث مشتق

فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطهٔ x_0 تعریف شده باشد.

می‌گوییم تابع f در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر است هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



$$\text{شیب خط } l = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

بنام خدا

بنابراین کمیت زیر در واقع شیب خط مماس

بر تابع را در نقطه x_0 نشان می‌دهد.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= f'(x_0) \rightarrow$$ شیب خط مماس بر تابع در نقطه x_0