تمرین ۱

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر مفروض است. نشان دهید که f در تمام نقاط پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & x>0\\[2mm] \dfrac{e^x-1}{x+1} & x\in(-1,0]\end{cases}$$

دامنه تابع $(-1,+\infty)$ است.

فرض کنیم که $a>0$ در دامنه تابع باشد

می‌دانیم که تابع $1+x^2$ تابعی پیوسته است تابع $\ln$ نیز در دامنه خود پیوسته است. همچنین

برای $x>0$ داریم $1+x^2\geq 0$ (یعنی در دامنه‌ی $\ln$ واقع می‌شود). پس تابع $\underbrace{\ln(1+x^2)}_{\text{ترکیب دو تابع پیوسته}}$ پیوسته است.

همچنین از آنجا که مخرج در $x>0$ پیوسته و ناصفر است پس تابع $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ در $x>0$ پیوسته است.

«بررسی» تابع در $x<0$ به عهده شما (تمرین)

بررسی پیوستگی تابع در نقطه‌ی $x=0$.

برای اثبات این که تابع مورد نظر در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است باید ثابت کنیم که

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \quad ⊛$$

$f(0)=0$.

برای اثبات * باید نشان دهیم که

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} f(x)}=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$$

می‌شد $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

بنا به ضابطه تابع داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

توجه: $e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots$

بنابراین برای هر $t>0$ داریم $e^t>1+t$

تمرین ۱

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر مفروض است. نشان دهید که f در تمام نقاط پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & x>0\\[2mm] \dfrac{e^x-1}{x+1} & x\in(-1,0]\end{cases}$$

از آنجایی که $\ln$ تابعی صعودی است می‌توان از دو طرف $\ln$ گرفت. پس به *** داریم

$$\ln(e^t) > \ln(1+t) \qquad t>0$$

$$\Rightarrow t > \ln(1+t) \qquad t\geq 0$$

از آنجایی که $x^2\geq 0$ داریم

پس $x^2 > \ln(1+x^2)$

$$0 \leq \frac{\ln(1+x^2)}{x} \leq \frac{x^2}{x} = x$$

پس بنابر فشردگی داریم

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=0$$

همچنین داریم

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x+1} = 0$$

$$= \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ تابع در نقطه‌ی $x=0$ هم پیوسته است.

خلاصه

$$\ln(1+x) < x \Rightarrow$$

$$\ln(1+x^2) < x^2$$

$$0 \leq \frac{\ln(1+x^2)}{x} \leq \frac{x^2}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=0$$

تمرین ۲: نشان دهید که

$$\exists c\in\mathbb{R} \quad \frac{e^c}{c} = c^3 - 1$$

کافی است نقطه‌ی c را به گونه‌ای بیابیم که $e^c = c^4 - c$

به بیان دیگر به دنبال نقطه‌ای هستیم که در آن تابع

$$g(x) = e^x - x^4 + x$$

برابر با صفر شود.

$$g(0) = 1 - 0 - 0 = 1 > 0$$

$$g(2) = e^2 - 16 + 2 = e^2 - 14 < 0$$

از آنجا که تابع g در $[0,2]$ پیوسته است

$$g(0) > 0$$

$$g(2) < 0$$

بنا به قضیه‌ی مقدار میانی

$$\exists c\in(0,2) \quad g(c) = 0 \quad \checkmark$$

توضیح: در تمرین قبل اگر بازه‌ای به صورت $(-a,a)$ انتخاب می‌کردیم خطر $c=0$ وجود داشت که بنا به صورت اصلی سؤال $c=0$ مورد قبول ما نیست.

تمرین: نشان دهید که

$$\exists x\in(0,+\infty) \quad \ln x = \frac{x}{1+x^2}$$

پاسخ: تابع $g(x) = \ln x - \frac{x}{1+x^2}$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$g(1) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$g(e) = \ln e - \frac{e}{1+e^2} = 1 - \underbrace{\frac{e}{1+e^2}}_{<1} > 0$$

از آنجا که تابع g در $[1,e]$ پیوسته است و $g(1)g(e)<0$ بنا به قضیه‌ی [illegible]

$$\exists c\in(1,e) \quad g(c) = 0 \quad \checkmark$$

تمرین.

شعاع و بازه همگرائی سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$$

را بیابید.

سری مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-\sqrt{2}) \left(\frac{(x-\sqrt{2})^2}{2}\right)^n$$

$$(x-\sqrt{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(x-\sqrt{2})^2}{2}\right)^n$$

یک سری هندسی با قدر نسبت

$$r=\frac{(x-\sqrt{2})^2}{2}$$

سری هندسی $\sum r^n$ برای $|r|<1$ همگرا و برای $|r|\geq 1$ واگراست. پس سری مورد نظر در

$$\left|\frac{(x-\sqrt{2})^2}{2}\right|<1$$

$$-2<(x-\sqrt{2})^2<2$$

$$|x-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$$

بازه همگرائی

$$-\sqrt{2}<x-\sqrt{2}<\sqrt{2}$$

$$0<x<2\sqrt{2}$$

دقت کنید که اگر می‌خواستیم از آزمون ریشه یا نسبت استفاده کنیم، حتما باید نقاط انتهائی را چک می‌کردیم. در اینجا، آزمون سری توانی به راحتی به ما می‌گوید که در نقاط انتهائی، سری واگراست.