ویژگی‌های تابع نمایی

– تابع نمایی به صورت زیر است:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

– دامنه تابع نمایی: $\mathbb{R}$

– برد: $(0, +\infty)$

اگر $x > 0$ آن‌گاه $e^x = 1 + x + \cdots > 1$

اگر $x < 0$ آن‌گاه $e^x = \frac{1}{e^{-x}} < 1$

اگر $x > 0$ آن‌گاه $e^x > 1$ و اگر $x < 0$ آن‌گاه $0 < e^x < 1$. بنابراین برد تابع زیرمجموعه‌ای از $(0, +\infty)$ است.

ادعا: تابع e^x تمام برد $(0, +\infty)$ را می‌پوشاند.

اثبات: فرض کنید $c \in (0, +\infty)$ عددی دلخواه باشد. باید نشان دهیم که $\exists x \in (-\infty, \infty)$ $e^x = c$

بازه $[-\frac{1}{c}, c]$ را در نظر بگیرید. تابع e^x در این بازه پیوسته است. داریم $e^c = 1 + c + \cdots > c$ پس

$$e^c - c > 0$$

همچنین از این که $e^{\frac{1}{c}} > \frac{1}{c}$ نتیجه می‌گیریم که

$$e^{-\frac{1}{c}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{c}}} < c$$

یعنی $e^{-\frac{1}{c}} - c < 0$.

تابع $g(x) = e^x - c$. این تابع در $[-\frac{1}{c}, c]$ پیوسته است (زیرا ترکیبی از توابع پیوسته است).

$$g(-\tfrac{1}{c}) < 0$$

$$g(c) > 0$$

پس نقطه‌ای مانند x در بازه $(-\frac{1}{c}, c)$ وجود دارد به طوری که $g(x) = 0$.

نتیجه: $g(x) = e^x - c = 0$

پس $e^x = c$.

۲) تابع e^x در نقطه $x = 0$ پیوسته است.

اثبات: باید نشان دهیم که $\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$.

$$|e^x-1| = \left|1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots-1\right| =$$

$$\left|x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right| \le |x|\underbrace{\left(1+\frac{|x|}{2!}+\frac{|x|^2}{3!}+\cdots\right)}_{A}$$

اگر $|x|<1$ آنگاه $A \le 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots = e-1$

پس اگر $|x|<1$ آنگاه $|e^x-1| \le |x|A$

پس $-|x|A \le e^x-1 \le |x|A$

حد طرفین وقتی $x\to 0$ برابر با صفر است. پس

$$\lim_{x\to 0} e^x-1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} e^x = 1.$$

نتیجه. تابع e^x در تمام نقاط پیوسته است.

اثبات: فرض کنید c نقطه‌ای دلخواه در دامنه‌ی تابع باشد.

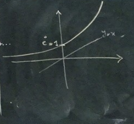
برای اینکه نشان دهیم تابع f در نقطه‌ی c پیوسته است

کافی است نشان دهیم که $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$.

در این مورد باید نشان دهیم که $\lim_{h\to 0} e^{c+h} = e^c$.

$$\lim_{h\to 0} e^{c+h} = \lim_{h\to 0} e^c \times e^h = e^c \times \lim_{h\to 0} e^h = e^c.$$

نمودار تابع e^x:



$x>0 \Rightarrow e^x>1$

$x<0 \Rightarrow 0<e^x<1$

ت ۱۴) برای هر عدد طبیعی n.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$$

پس $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ پس

$$0 \le \frac{x^n}{e^x} \le \frac{x^n}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} \to 0$$

بنا بر فشردگی $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

تمرین: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^n}{e^x} = ?$

یادآوری: $e^{rx} = (e^x)^r$

برای هر عدد گویای $r \in \mathbb{Q}$.

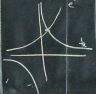
مثال: نشان دهید که معادلهٔ $e^x = \frac{1}{x}$ در $\mathbb{R}$ دارای جواب است. $(\exists t \quad e^t = \frac{1}{t})$

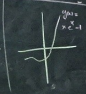
پاسخ: تابع $g(x) = xe^x - 1$ را در نظر بگیرید. تابع $g(x)$ در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته است. برای حل سوال کافی است نشان دهیم که این تابع در جایی صفر می‌شود.

$g(0) = -1 < 0$

$g(1) = e - 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots - 1 > 0$

تابع g به وضوح دربارهٔ بستهٔ $[0,1]$ پیوسته است. پس بنا به * و بنا به قضیهٔ مقدار میانی این تابع باید در یک عدد $c \in (0,1)$ برابر صفر شود و این مطلوب ماست.

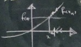




قضیه: فرض کنید تابع $g: I \to J$ یک تابع پیوسته و یک به یک باشد (I و J بازه هستند، فرقی ندارد باز یا بسته)

(دقت کنید که در این صورت تابع g قطعاً یکنوا خواهد بود)

حکم قضیه: در این صورت معکوس تابع g که آن را با g^{-1} نشان می‌دهیم در دامنهٔ خود پیوسته است.



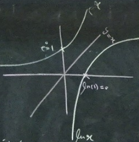
ایدهٔ اثبات: اگر $\{f(x_n)\}$ دنباله‌ای همگرا به $f(x)$ باشد، باید نشان دهیم که x_n به x میل می‌کند. دقت کنید که دنبالهٔ x_n نیز یک دنبالهٔ یکنوا است. (اگر x_n به عددی غیر از x میل کند آن گاه $f(x_n)$ به عددی غیر از $f(x)$ میل می‌کند). پس تنها کافی است ثابت کنیم که x_n همگرا است (صعودی و از بالا کراندار یا نزولی و از پایین کراندار)

گفتیم که تابع نمایی e^x، یک تابع صعودی و پیوسته است و یک‌به‌یک و پوشا

$$e^x:(-\infty,\infty)\to(0,+\infty)$$

نابراین این تابع معکوس‌پذیر است و معکوس آن که تابع ln نام دارد نیز تابعی پیوسته است.

$$\ln:\underbrace{(0,+\infty)}_{\text{دامنه تابع ln}}\to(-\infty,+\infty)$$



برخلاف تابع e^x که از تمام چندجمله‌ای‌ها سریعتر رشد می‌کند، تابع $\ln x$ $(x\to+\infty)$ از تمام چندجمله‌ای‌ها کندتر رشد می‌کند.

بررسی برخی ویژگی‌های تابع ln.

دامنه: $(0,+\infty)$

برد: $(-\infty,+\infty)$

– $\forall x>0\quad e^{\ln x}=x$ $\quad\boxed{f(f^{-1}(x))=x}$

– $\forall x\quad \ln(e^x)=x$ $\quad\boxed{f^{-1}(f(x))=x}$

– تابع $\ln x$ در تمام دامنه خود پیوسته است. (زیرا معکوس یک تابع پیوسته است).

– برای هر دو عدد $a,b\in(0,+\infty)$ داریم

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b$$

نکته: کافی است ثابت کنیم که

$$(*)\quad e^{\ln a+\ln b}=ab$$

$$\left(e^x=y\iff \ln y=x\right)$$

اثبات (*):

$$e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=a\times b$$

– $\forall x>0\quad \ln\frac{1}{x}=-\ln x$

اثبات: کافی است نشان دهیم که $e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$.

داریم

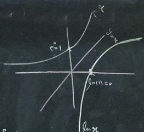
$$e^{-\ln x}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$$

— $\ln 1 = 0$ $\quad (e^0 = 1)$

— $\ln e = 1$ $\quad (e^1 = e)$

$\forall x,y>0 \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln x - \ln y$



برخلاف تابع e^x که از تمام چندجمله‌ای‌ها سریع‌تر رشد می‌کند، تابع $\ln x$ $(x\to+\infty)$ از تمام چندجمله‌ای‌ها کُندتر

— تابع $\ln$ صعودی است (یعنی اگر $0<x<y$ آن‌گاه $\ln x<\ln y$).

$\ln x<\ln y \iff e^{\ln x}<e^{\ln y} \iff x<y$

— دامنهٔ $\ln$ بازهٔ $(0,+\infty)$ است.

— برای هر $x>1$ آن‌گاه (از آنجا که $\ln$ صعودی است) داریم $\underset{\ln 1}{\ln x>0}$. برای هر $0<x<1$ داریم $\ln x<0$.

— $x>\ln x \quad \forall x\in(0,+\infty)$ (زیرا $e^x>x$)

— $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

اثبات: $\lim_{x\to+\infty}\ln x \underset{x=e^t}{\overset{\text{تغییر متغیر}}{=}} \lim_{e^t\to+\infty}\ln(e^t) = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty$

$e^t\to+\infty \Updownarrow t\to+\infty$

— $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

اثبات: $\lim_{x\to0^+}\ln x \overset{\text{تغییر متغیر}}{=} \lim_{e^t\to0^+}\ln(e^t) = \lim_{t\to-\infty} t = -\infty$

$(\iff t\to-\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \quad (\text{برای هر } n\in\mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} \underset{x=e^t}{\overset{\text{تغییر متغیر}}{=\!=}} \lim_{e^t\to+\infty}\frac{\ln(e^t)}{e^{nt}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{(e^t)^n}=0$$

$(\Leftrightarrow t\to+\infty)$

توجه) برای آشنایی با کاربردها در کتاب

استوارت هفتم

Applied project را مطالعه بفرمائید)

برای اطلاعات عمومی

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$=\sum(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$\forall x\in(-1,1]$.

سایر توابع نمایی

توانهای طبیعی را در ریاضیات مقدماتی فرا گرفته اید:

$$\underset{\text{عدد دلخواه}}{a}^{\overset{\text{عدد طبیعی}}{n}}=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\ \text{بار}}$$

همچنین با توانهای گویا نیز آشنا شده اید:

$a>0$

$$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$$

تمرین) فرض کنید a یک عدد طبیعی مثبت باشد و $n\in\mathbb{N}$.

نشان دهید که عدد b موجود است که

$$b^n=a$$

(عدد b را با $\sqrt[n]{a}$ نمایش می دهیم)

(با استفاده از قضیه مقدار میانی ثابت کنید)

هدف درس بعدی: تعمیم مفهوم توان به تمام اعداد حقیقی.

$$a^{\pi}=?\qquad a^{e}=?$$