قضیه (مقدار میانی)

فرض کنید تابع f یک تابع پیوسته روی یک بازهٔ بسته‌ی $[a,b]$ باشد.
اگر $f(a).f(b)<0$ آن‌گاه نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ موجود است به طوری که $f(c)=0$.

فرض کنید $f(a)<0$ ، $f(b)>0$

ایدهٔ اثبات: دنباله‌ی (a_n) ، (b_n) را به صورت زیر بسازید:

$f(a_0)<0 \quad f(b_0)>0$

$a_0=a \quad b_0=b$

نقطهٔ $\frac{a_0+b_0}{2}$ را در نظر بگیرید. سه حالت داریم:

الف) $f(\frac{a_0+b_0}{2})=0$ ✓ تمام

ب) $f(\frac{a_0+b_0}{2})>0$ آن‌گاه قرار دهید

$a_1=a_0 \quad b_1=\frac{a_0+b_0}{2}$

ج) اگر $f(\frac{a_0+b_0}{2})<0$ آن‌گاه قرار می‌دهیم

$a_1=\frac{a_0+b_0}{2}$

$b_1=b_0$

توجه کنید که $[a_1,b_1]\subseteq[a_0,b_0]$ و طول بازه‌ی $[a_1,b_1]$ نصف طول بازه‌ی اول است.

با ادامه‌ی همین روند یک دنباله‌ی

$\ldots\subseteq[a_1,b_1]\subseteq[a_0,b_0]$

$\ldots\subseteq[a_n,b_n]\ldots$

دقت کنید که دنباله‌ی a_n صعودی است و دنباله‌ی b_n نزولی است و هر دو کراندارند.

یعنی $\lim a_n$ و $\lim b_n$ هر دو موجودند.

باید ثابت کرد که $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=l$ [redacted]

و l در بازه‌ی $[a_0,b_0]$ واقع است.

توجه کنید برای هر n، $f(a_n)<0$ و $f(b_n)>0$.

دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ را در نظر بگیرید. از آنجایی که f پیوسته است هر دوی این دنباله‌ها همگرا هستند. توجه کنید که

$a_n\to l$

$b_n\to l$

$f(a_n)\to f(l)$

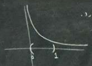
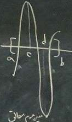
$f(b_n)\to f(l)$

از آنجایی که جملات دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ منفی هستند $\lim_{n\to\infty} f(a_n)\le 0$

به همین ترتیب $\lim_{n\to\infty} f(b_n)\ge 0$ یعنی $l\le 0$ و $l\ge 0$

پس $l=0$.

برای مثال تابع $y=\frac{1}{x}$ در بازه $(0,1]$ پیوسته است ولی ماکزیمم ندارد.



توجه: تمام شرایط یاد شده برای درست بودن قضیه لازم هستند.

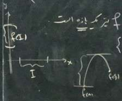
نتیجه: اگر تابع f در یک بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد آن گاه f در این بازه دارای یک مینیمم مطلق و یک ماکزیمم مطلق است. (یعنی اولاً تابع در این بازه کراندار است، ثانیاً ماکزیمم و مینیمم دارد)

$\exists c\in[a,b] \quad \forall x\in[a,b] \quad f(x)\le f(c)$

$\exists d\in[a,b] \quad \forall x\in[a,b] \quad f(x)\ge f(d)$

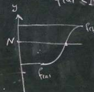
نتیجه: اگر f یک تابع پیوسته باشد و I یک بازه باشد $\left(\begin{array}{ll} (\quad +\infty) & I=(a,b) \\ (-\infty,+\infty) & I=[\quad) \\ (-\infty,b) & \quad [\quad] \end{array} \right)$ آن گاه $f(I)$ نیز یک بازه است.

$f(I)=\{f(x) \mid x\in I\}$



قضیه (مقدار میانی)

فرض کنید تابع f یک تابع پیوسته روی یک بازه بسته $[a,b]$ باشد. آن گاه اگر $f(a)<f(b)$ و $f(a)<N<f(b)$ آن گاه عدد $a<c<b$ موجود است به طوری که $f(c)=N$



تابع نمایی (Exponential function)

تابع نمایی را می‌توان به چندین صورت معادل تعریف کرد

الف) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

ب) $e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

ج) تابع نمایی تنها تابعی است که در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1 \end{cases}$$

د) تنها تابع y است که

$$x=\int_1^y \frac{1}{t}\,dt$$

در اینجا از تعریف اول استفاده خواهیم کرد.

در درس‌های پیش دیدیم که سری توان

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

به ازای هر $x\in(-\infty,+\infty)$ همگرا است.

پس به ازای هر $a\in(-\infty,\infty)$ حاصل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ برابر با یک عدد می‌گردد. به آن عدد e^a گفته می‌شود.

$$e^x:(-\infty,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$a\mapsto 1+a+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots$$

ویژگی‌های تابع نمایی:

1) دامنهٔ تابع نمایی تمام $\mathbb{R}$ است، زیرا سری $\sum\frac{x^n}{n!}$ در تمام $x\in\mathbb{R}$ همگرا است.

2) $e^0=1$

3) اگر $x\geq 0$ آنگاه $e^x\geq 1$.

$$e^x\geq 1+x$$

$$e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

4) $e^1:=e$

$$e^1=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

لم 5) تابع e^x در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؛ یعنی $\lim_{x\to 0}e^x=e^0=1$.

اثبات

باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ چنان یافت می‌شود که اگر $|x| < \delta$ آن گاه $|e^x - 1| < \varepsilon$.

توجه کنید که

$$|e^x - 1| = \left|\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1\right|$$

$$= \left|x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right| = \left|x\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)\right|$$

$$= |x| \left|1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right|$$

$$\le |x| \left|\left(1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \cdots\right)\right| \quad A$$

توجه کنید که اگر $|x| < 1$ آن گاه

$$A \le |x| \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)}_{e-1}$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

برای $\varepsilon > 0$ داده شده اگر $\delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{e-1}\right\}$

آن گاه اگر $|x| < \delta$ آن گاه

$$|e^x - 1| \le |x|(e-1) < \delta(e-1)$$

$$< \frac{\varepsilon}{e-1} \times e - 1 = \varepsilon$$

$-1 \quad x \quad 1$

لم ۲

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots$$

$$e^b = 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \cdots$$

$$e^{(a+b)} = 1 + (a+b) + \frac{(a+b)^2}{2!} + \frac{(a+b)^3}{3!} + \cdots$$

لم کلی

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ فرض کنید

دو سری مطلقاً همگرا باشند و

$\sum a_n \to \ell$

$\sum b_n \to \ell'$

آن گاه سری زیر (که آن را حاصلضرب کشی Cauchy

دو سری $\sum a_n, \sum b_n$ می‌نامیم)

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ همگراست

$\ell \times \ell' =$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots$$

$$e^b = \sum \frac{b^n}{n!} = 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \cdots$$

$$e^a \times e^b = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$c_n = \frac{1}{1}\frac{b^n}{n!} + \frac{a\, b^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a^2}{2!}\frac{b^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{a^3}{3!}\frac{b^{n-3}}{(n-3)!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} =$$

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2}+\dots$

$= a^0b^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}a^1b^{n-1} + \frac{n!}{2!(n-2)!}a^2b^{n-2}+\dots$

$\Rightarrow c_n = \frac{(a+b)^n}{n!} \Rightarrow \sum c_n = \sum \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b}$

$\Rightarrow e^{a+b} = e^a \times e^b$

لم ۷: تابع e^x در هر $a\in\mathbb{R}$ پیوسته است.

اثبات: فرض کنید $a\in\mathbb{R}$ دلخواه باشد. کافی است ثابت کنیم که

$\lim_{h\to 0} e^{a+h} = e^a$

(تابع f در نقطه a پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$)

$h\to 0$

$\xrightarrow{a+h}$

$a \quad a+h$

$h\to 0$

$a+h\to a$

داریم:

$\lim_{h\to 0} e^{a+h} \overset{I}{=} \lim_{h\to 0} e^a\times e^h$

گفتیم که در صفر پیوسته است

$= e^a \times \lim_{h\to 0} e^h = e^a\times e^0 = e^a$ ✓

لم ۸: $e^{na} = e^{a+a+\dots+a} = e^a\times e^a\times\dots\times e^a = (e^a)^n$

لم ۹: تابع e^x صعودی است.

اثبات: فرض کنید $x<y$. باید نشان دهیم که $e^x<e^y$.

داریم $y-x>0$. پس $e^{y-x} = 1+(y-x)+\dots \geq 1$

اگر ثابت کنیم که (*) را بپذیریم $e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$ مسأله اثبات شده است.

(۱۰) $e^x\times e^{-x} = e^0 = 1$

بنابراین $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

(۱۱) $e^{y-x} = e^y\times e^{-x} = \frac{e^y}{e^x}$ (*)

(۱۲) اگر $x>0$ آنگاه $e^x = 1+x+\dots>1$

اگر $x<0$ آنگاه $0<e^x<1$

(۱۳) لم: تابع $e^x:(-\infty,\infty)\to(0,\infty)$ پوشا است.

اثبات: فرض کنید $c\in(0,+\infty)$. نشان می‌دهیم که عدد b وجود دارد به طوری که $e^b=c$.

تابع $g(x) = e^x - c$ را در نظر بگیریم

پس این تابع پیوسته است

$e^{c} > c$

$e^{\frac{1}{c}} = 1 + \frac{1}{c} + \cdots > \frac{1}{c}$

$e^{-\frac{1}{c}} < c$

$g(c) = e^{c} - c$, $g(c) > 0$

$e^{c} = 1 + c + \cdots > c$

$g(-\frac{1}{c}) = e^{-\frac{1}{c}} - c < 0$

$e^{\frac{1}{c}} > \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{1}{c}}} < c \Rightarrow e^{-\frac{1}{c}} < c$

$e^{c} - c > 0 \Rightarrow \exists b \in (-\frac{1}{c}, c) \quad e^{b} = c$

$e^{-\frac{1}{c}} - c < 0$ [illegible] $[-\frac{1}{c}, c]$, e^{x} [illegible]