تمرین

فرض کنید تابع f بر بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته باشد و $f(0)=f(1)$

نشان دهید که عددِ $a\in[0,\frac{1}{2}]$ چنان یافت می‌شود که

$$f(a)=f(a+\frac{1}{2})$$

یادآوری (قضیه‌ی مقدار میانی)

فرض کنید تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد (یعنی در تمام نقاط بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد و $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$). فرض کنید $f(a)<f(b)$ آن‌گاه

تابع f همه‌ی مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می‌کند.

به طور خاص اگر $f(a)<0$ و $f(b)>0$ آن‌گاه نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ موجود است، طوری که

$$f(c)=0$$

پاسخ: تابع $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$ را در نظر بگیرید.
تابع g در بازه $[0,\frac{1}{2}]$ پیوسته است
و

$$g(0)=f(0)-f(\tfrac{1}{2})$$

$$g(\tfrac{1}{2})=f(\tfrac{1}{2})-f(1)=f(\tfrac{1}{2})-f(0)$$

اگر $f(\frac{1}{2})=f(0)$ که مطلوب سوال است ($a=0$).

اگر $f(0)\neq f(\frac{1}{2})$ آن گاه $g(0)$ و $g(\frac{1}{2})$ مختلف العلامه هستند. پس بنا به پیوستگی تابع g در $[0,\frac{1}{2}]$ و بنا به قضیه مقدار میانی (حالت خاص) نقطه $a\in(0,\frac{1}{2})$ پیدا می‌شود بطوری که $g(a)=0$.

$$g(a)=f(a)-f(a+\tfrac{1}{2})=0$$

یعنی:

پس $f(a)=f(a+\frac{1}{2})$.

□

تمرین: نشان دهید که همه‌ی شرایط قضیه‌ی مقدار میانی برای درست بودن این قضیه، لازم هستند.

تمرین: نشان دهید که تابع $g(x)=x^2-3+\frac{1}{x}$ در $(0,2)$ حداقل 2 بار صفر می‌شود.

اولاً که تابع g در تمام نقاط بازه‌ی $(0,2]$ پیوسته است.

$$g(1)=-1$$

$$g(2)=4-3+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}$$

از آنجا که تابع g در بازه‌ی $[1,2]$ در شرایط قضیه‌ی مقدار میانی صدق می‌کند و $g(1)<0$, $g(2)>0$، نتیجه می‌گیریم که این تابع دارای حداقل یک صفر در بازه‌ی $(1,2)$ است.

توجه کنید که $\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ بنابراین تابع g در نزدیکی صفر دارای مقادیر مثبت بزرگ است. یعنی قطعاً می‌توان نقطه‌ای در نزدیکی صفر پیدا کرد b طوری که $g(b)>0$.

حال تابع g در $[b,1]$ پیوسته است و $g(1)<0$ و $g(b)>0$. بنابراین تابع دارای یک صفر در بازه‌ی $(b,1)$ است.

بررسی پیوستگی در $x=0$

کران‌دار

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x^2\sin\left(\frac{x^3-1}{x}\right) = 0 = f(0)$$ لذا

پس تابع مورد نظر در نقطه 0 هم پیوسته است.

تمرین: نشان دهید که تابع زیر در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{x^3-1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

پاسخ: ابتدا تابع f در نقاط $x\neq 0$ پیوسته است. زیرا در $x\neq 0$ تابع $\frac{x^3-1}{x}$ پیوسته است و تابع $\sin$ هم همه‌جا پیوسته است پس ترکیب این دو تابع یعنی تابع $\sin\left(\frac{x^3-1}{x}\right)$ پیوسته است. هم چنین تابع x^2 پیوسته است پس $x^2\sin\left(\frac{x^3-1}{x}\right)$ پیوسته است.