مفهوم حد توابع

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه $a\in\mathbb{R}$ تعریف شده باشد.

آن گاه می گوییم $\lim_{x\to a} f(x)=L$ هرگاه

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta \quad \forall x \left(0<|x-a|<\delta \to |f(x)-L|<\varepsilon \right)$$

$$a-\delta<x<a+\delta \qquad L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$$
$$x\neq a$$

سوال: با استفاده از تعریف نشان دهید که $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

پاسخ: فرض کنید که $\varepsilon>0$ داده شده باشد. هدف: پیدا کردن یک عدد δ به طوری که

هرگاه $|x-1|<\delta$ آنگاه $\left|\frac{x-1}{x^2-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

توجه کنید که برای $x\neq 1$ داریم $\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$. همچنین $\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right|$.

اگر $|x-1|<1$ آنگاه $0<x<2$ و در نتیجه $1<x+1<3$ و در نتیجه $\frac{1}{3}<\frac{1}{x+1}<1$ و $\frac{1}{6}<\frac{1}{2(x+1)}<\frac{1}{2}$

پس در صورتی که $|x-1|<1$ عبارت $\frac{1}{2(x+1)}$ مقدارش از $\frac{1}{2}$ کمتر است. حال اگر $\delta<2\varepsilon$ و $\delta<1$، آنگاه اگر $|x-1|<\delta$ داریم:

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right| \underset{\text{چون } \delta<1}{\le} |x-1|\times\frac{1}{2} < \frac{\delta}{2} < \frac{2\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

یعنی اگر $\delta<\min\{1,2\varepsilon\}$ آنگاه $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. پس به هدف مورد نظر رسیدیم. $\square$

پایان

مثال نشان دهید که $\lim_{x\to a} x = a$.

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد. هدف: پیدا کردن عدد δ به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta$ آن گاه $|x-a|<\varepsilon$. کافی است δ هر عدد دلخواه کمتر از ε باشد.

مثال $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

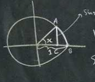
فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد. هدف: پیدا کردن δ به طوری که اگر $|x|<\delta$ آن گاه $|\sin x|<\varepsilon$.

ادعا: برای xهای نزدیک به صفر $|\sin x|<|x|$.

با فرض درست بودن این ادعا، کافی است δ را کمتر از ε انتخاب کنیم. آن گاه اگر $|x|<\delta$ آن گاه

$$|\sin x| \leq |x| < \delta \leq \varepsilon$$

اثبات اینکه برای $x>0$ داریم $\sin x < x$.



$|AC| < \widehat{AB}$

$\sin x < x$

توجه: طول کمان روبه‌روی زاویهٔ θ درجه در یک دایره به شعاع r:

$r\theta$

محیط دایره برابر است با:

$2\pi r$

زاویهٔ کل دایره

یادآوری

فرض کنید f و g دو تابع باشند که در یک همسایگی نقطهٔ a داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$. آن‌گاه در صورت وجود حدود

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

تمرین: فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = l > 0$. آن‌گاه نشان دهید که در یک همسایگی از a، $f(x)$ اکیداً بزرگتر از صفر است.

یادآوری

فرض کنید در یک همسایگی محذوف a داشته باشیم

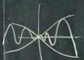
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

و می‌دانیم که

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$$

آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} g(x) = l.$$



مثال: نشان دهید که $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

اثبات:

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$ پس

$$\underset{\downarrow\,0}{-x} \leq x\sin\frac{1}{x} \leq \underset{\downarrow\,0}{x}$$

بنابر قضیهٔ قبل، $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

یادآوری (تمرین)

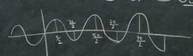
$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ x_n اگر $x_n \to a$، $x_n \neq a$ آن‌گاه $f(x_n) \to l$.

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \cdots \to a$$

$$f(x_1) \quad f(x_2) \cdots \to l$$

مثال: نشان دهید که تابع $\sin\frac{1}{x}$ در $x=0$ حد ندارد.



$\sin x$ در نقاط $(4n+1)\frac{\pi}{2}$ برابر 1 است.

$\sin x$ در نقاط $(4n+3)\frac{\pi}{2}$ برابر -1 است.

دنباله‌های a_n و b_n را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$a_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$b_n = \frac{1}{(4n+3)\frac{\pi}{2}}$$

داریم: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ $(a_n, b_n \to 0)$

اما $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = 1$

$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = -1$

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$

$f(a_n)$

مثال: نشان دهید که $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

مثال بالا را برای $x \to 0^+$ ثابت می‌کنیم.

داریم که $\sin x \le x$. پس $\frac{\sin x}{x} \le 1$.

مساحت مثلث‌ها و قطاع را بنویسید:

مساحت قطاع به زاویهٔ θ در یک دایره برابر است با $\frac{\theta r^2}{2}$. پس مساحت قطاع آبی $\frac{x}{2}$.

$\begin{cases} \theta = x \\ r = 1 \end{cases}$

مساحت مثلث: $\frac{\tan x}{2}$

داریم $\frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$ یعنی $x < \tan x$

$$x \le \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \ge \cos x$$

بنابراین

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

و $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ ، $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ بنابر فشردگی

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

توجه: در صورت وجود حدود:

① $\lim_{x\to t} af(x) + bg(x) = a\lim_{x\to t} f(x) + b\lim_{x\to t} g(x)$

② $\lim_{x\to t} f(x)g(x) = \lim_{x\to t} f(x) \times \lim_{x\to t} g(x)$

③ $\lim_{x\to t} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to t} f(x)}{\lim_{x\to t} g(x)}$

(در صورتی که $\lim g(x) \neq 0$).

یادآوری

منظور از $\lim_{x\to a^+} f(x)$ / $\lim_{x\to a^-} f(x)$

$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

تمرین: فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ -1 & x \notin Q \end{cases}$. با استفاده از تعریف حد نشان دهید که $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود ندارد.

مفهوم پیوستگی

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطهٔ a تعریف شده باشد.

بر دو طرف a تابع f در خود

$|x-a|<\delta$

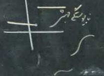
نقطهٔ a تعریف شده است. می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a پیوسته است هرگاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right)$$

انواع ناپیوستگی‌ها در نقطهٔ a:

ناپیوستگی جهشی



ناپیوستگی رفع شدنی

ناپیوستگی بی‌نهایت

مثال

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$$

تابع بالا در نقطهٔ $x=2$ ناپیوسته است

$$\underset{x\neq 2}{f(x)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = x+1$$

پس $\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = 3$

ناپیوستگی این تابع در $x=2$ رفع شدنی است

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$$

مثال‌های تعبیری:

$f(x)=\lfloor x \rfloor$ در نقطه‌ی $x=1$. (جهشی)

$f(x)=\frac{1}{x^2}$ در نقطه‌ی $x=0$. (بی‌نهایت)

تمرین: نقاط ناپیوستگی توابع زیر را بیابید، نوع آنها را مشخص کنید، تابع را رسم کنید و حد آنها را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<-1 \\ x & -1\le x\le 1 \\ \frac{1}{x} & x\ge 1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ 3-x & 1\le x\le 4 \\ \sqrt{x} & x>4 \end{cases}$$

(۵) توابع چندجمله‌ای $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)$ در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند. توابع گویا $\frac{f(x)}{g(x)}$ در تمام دامنه‌ی خود پیوسته‌اند.

اگر f در نقطه‌ی a پیوسته باشد و g در $f(a)$ پیوسته باشد آنگاه $g\circ f$ در a پیوسته است و $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$.

توابع $\sqrt[n]{f(x)}$ هرجا f پیوسته باشد و $\sqrt[n]{f}$ تعریف شده باشد پیوسته‌اند.

توابع $\sin$ و $\cos$ هم در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

قضیه‌ی مقدار میانی

فرض کنید $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد (یعنی در هر نقطه‌ی $x\in(a,b)$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$).

و فرض کنید $f(a)<f(b)$. آنگاه برای هر $f(a)<N<f(b)$ نقطه‌ی $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که $f(c)=N$.