تمرین: به ازای چه مقادیری از x سری $\sum \frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}$ همگراست

پاسخ اول: از آزمون نسبت روی $|a_n|$ استفاده می‌کنیم

$$a_n = \frac{n(n-1)(x-3)^n}{2^n(2n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(n+1)\cancel{n}(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}(2n+3)^2}\right|}{\left|\frac{\cancel{n}(n-1)\cancel{(x-3)^n}}{\cancel{2^n}(2n+1)^2}\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(x-3)}{2}\right| \times (n+1) \times (2n+1)^2}{(2n+3)^2 \times (n-1)} = \left|\frac{x-3}{2}\right|$$

بنا به آزمون نسبت اگر $\left|\frac{x-3}{2}\right| < 1$ آنگاه سری مورد نظر همگراست. پس $1 < x < 5$ سری مورد نظر برای همگراست. همچنین بنا به آزمون نسبت سری مورد نظر اگر $\left|\frac{x-3}{2}\right| > 1$ واگراست. پس برای $x > 5$ یا $x < 1$ واگراست.

حال توجه می‌کنیم که آزمون نسبت برای وقتی که $\left|\frac{x-3}{2}\right|=1$ کمکی نمی‌کند.

پس این حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم: داریم

$$\left|\frac{x-3}{2}\right|=1 \Leftrightarrow x=5 \text{ یا } x=1$$

بررسی سری در $x=5$. باید سری

$$\sum \frac{n(n-1)}{(2n+1)^2}$$

را بررسی کنیم.

از آنجا که حد جملهٔ عمومی مخالف صفر است، سری مورد نظر واگرا است.

بررسی نقطهٔ $x=1$: سری مورد نظر به صورت

$$\sum \frac{n(n-1)(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

در می‌آید. دوباره از آنجا که حد جملهٔ عمومی مخالف صفر است

این سری واگرا است.

تمرین: همین سوال را با آزمون ریشه حل کنید.

تمرین:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$$

حل. قرار دهید $a_n=\left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=0$$

بنا به آزمون ریشه، سری مورد نظر همگرا است.

تمرین

$$\sum\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$$

راهنمایی: با $\sum \frac{1}{n}$ مقایسهٔ حدی کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است پس برای محاسبهٔ آن از قاعدهٔ لوپیتال استفاده می‌کنیم.

توجه

$$2^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln 2}$$

$$\left(2^{\frac{1}{n}}\right)'=-\frac{1}{n^2}\ln 2\times e^{\frac{1}{n}\ln 2}$$

خلاصه

$$\left(2^{\frac{1}{n}}\right)'=-\frac{1}{n^2}\ln 2\times 2^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{-\frac{1}{n^2}}\times\ln 2\times 2^{\frac{1}{n}}}{\cancel{-\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\ln 2\neq 0$$

پس بنا بر آزمون مقایسهٔ حدی سری مورد نظر واگراست.

سری‌های توانی

به یک سری به صورت

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

یک سری توانی گفته می‌شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

به طور کلی به یک سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ یک سری توانی حول a گفته می‌شود.

یک سری توان حول نقطهٔ a به صورت زیر است:

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

قضیه فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ یک سری توان باشد. آن گاه از یکی از حالت‌های زیر خارج نیست:

$x=a$

الف) سری مورد نظر تنها در نقطهٔ ی همگراست.

ب) عدد $R \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که سری مورد نظر در $a-R < x < a+R$ همگراست.

ج) سری مورد نظر همه جا همگراست.

در مورد ب بازهٔ همگرائی می‌تواند به یکی از صورت‌های زیر باشد:

$$[a-R,\ a+R]$$

$$[a-R,\ a+R)$$

$$(a-R,\ a+R]$$

$$(a-R,\ a+R)$$

به هر سری توان می‌توان به عنوان یک تابع نگاه کرد که دامنهٔ آن گسسته نیست.

مثلاً اگر سری $\sum c_n(x-a)^n$ در بازهٔ $a-R < x < a+R$ همگرا باشد آن گاه تابع f را به صورت زیر داریم:

$$\mathrm{Dom}\, f = \{x \mid a-R < x < a+R\}$$

$$x \xmapsto{f} \sum c_n(x-a)^n$$

__مثال__ سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ یک سری توان است که بازهٔ همگرایی تمام $\mathbb{R}$ است. $c_n = \frac{1}{n!}$

به این سری تابع نمایی را نسبت می‌دهیم.

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sum \frac{x^n}{n!}$

__مثال__ تابع $\frac{1}{1-x}$ در $|x|<1$ به صورت زیر است:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$|x| < 1$

مثال: دامنهٔ همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ را بیابید

پاسخ از آزمون نسبت استفاده شود روی $|a_n|$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(x-3)^n}{n}\right|} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{|x-3|n}{n+1} = |x-3|$$

پس سری مورد نظر هرگاه $|x-3|<1$ باشد یعنی $2 < x < 4$ همگراست و اگر $x>4$ یا $x<2$ باشد واگراست

بررسی حالت $|x-3|=1$،

یعنی در $x=2$ یا $x=4$

(1) $x=2$

$$\sum \frac{(x-3)^n}{n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

بنا بر آزمون لایبنیتز این سری همگرا است

(2) $x=4$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

سری مورد نظر واگرا است

پس بازه همگرایی سری مورد نظر

$2 \leq x < 4$

است

مثال دامنه همگرایی سری توان $\sum n!\, x^n$ را تعیین کنید.

پاسخ از آزمون نسبت روی $|a_n|$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim \frac{\left|(n+1)!\, x^{n+1}\right|}{\left|n!\, x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x|$$

حد فوق تنها در صورتی موجود است که $x=0$.

بنا بر این سری یاد شده تنها دارای دامنه همگرایی $\{0\}$ است

مثال دامنه همگرایی سری توان

$$\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

را تعیین کنید.

تابع $\sin x$ یک تابع تحلیلی است.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

به عنوان تمرین نمودار توابع $\sin x$ و x و $x - \frac{x^3}{3!}$ و $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ را رسم کنید.

تابع: سری تمرین قبل مربوط به یک تابع معروف به نام تابع بسل است.

$$J(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

اطلاعات عمومی: به هر تابعی که بتوان آن را در یک دامنه (بازه‌ای) به صورت سری توان نشان داد، و مقدار تابع با مقدار سری برابر باشد، تابع تحلیلی گفته می‌شود.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}}{\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2}{2^2 (n+1)^2} \right|$$

حد بالا به ازای هر عدد حقیقی x برابر با صفر است

پس دامنه همگرایی سری مورد نظر تمام $\mathbb{R}$ است

حد و پیوستگی توابع

منظور از تابع، ضابطه‌ای است که هر عنصر متعلق به یک مجموعهٔ D را به یک عنصر یکتا در مجموعهٔ E نظیر می‌کند.

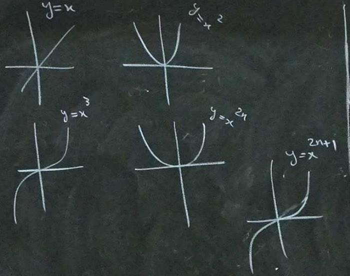
در این درس با دو دستهٔ کلی از توابع سر و کار داریم.

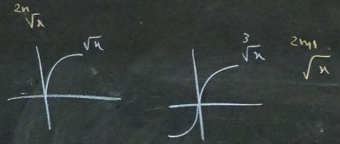
دستهٔ اول، توابع جبری — دستهٔ دوم، توابع غیرجبری

توابع جبری: توابعی هستند که با استفاده از تعداد متناهی متغیر و تعداد متناهی اعمال جمع، ضرب و تقسیم و تفریق (داشتن توان گویا) به دست بیایند.

توابعی را که جبری نباشند غیرجبری می‌نامیم. برای مثال تابع $f(x)=x^2+2x+1$ یک تابع جبری است ولی توابع e^x و $\sin x$ توابعی غیرجبری هستند.

توابع چندجمله‌ای، توابع به صورت $\sqrt[n]{a_n x^n+\dots+a_0}$ و $\frac{p(x)}{q(x)}$ (چندجمله‌ای) جبری هستند.





توجه: به توابع به صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ که در آن f، g چندجمله‌ای هستند ($g \neq 0$)، توابع گویا گفته می‌شود.

گفتیم که هدف ح ب مطالعهٔ تغییرات پیوسته متغیرها برحسب همدیگر است. ابزار حساب برای این مطالعه، مفاهیم حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال (از دنباله‌ها استفاده می‌شود) هستند.

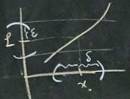
تعریف: فرض کنید f یک تابع باشد که دامنهٔ آن و بُرد آن زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ هستند. فرض کنید تابع f در یک بازه حول نقطهٔ $x_0 \in \mathbb{R}$ (مثلاً در بازهٔ (x_0-R, x_0+R)) تعریف شده باشد. نیازی نیست که این تابع در خود نقطهٔ x_0 تعریف شده باشد.

x_0

می‌گوییم حد تابع f وقتی x به x_0 میل کند برابر با ℓ است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

هرگاه مقادیر تابع f به «هر اندازهٔ دلخواه» به ℓ نزدیک شوند به شرط آن که مقادیر x «به اندازهٔ کافی» به x_0 نزدیک باشند.



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$$

$$\forall x \left(\underbrace{0 < |x - x_0| < \delta} \rightarrow \underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon} \right)$$

فاصلهٔ x از x_0 کمتر از δ باشد و لزوماً x برابر x_0 نباشد

فاصلهٔ $f(x)$ از l کمتر از ε شود.