بنام خدا

محسن خانی

ریاضی عمومی 1

Calculus

حساب دیفرانسیل
وانتگرال (حسابان)

نیوتن . لایبنیتز

Leibniz

حساب   مطالعه تغییرات پیوسته

سنگریزه   حسابگر

حساب دیفرانسیل (مشتق)

حساب

حساب انتگرال

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$\int f' = f$$

$y = x^2$

شروع درس

دنباله ها و سری ها

کاربرد دنباله ها: درک مفهوم مثل کردن (همگرایی)

درک اعداد اصم

تعریف (دنباله)

منظور از یک دنباله $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

لیستی از اشیاء است که در $\mathbb{N}$

اندیس گذاری شده‌اند. $a_1, a_2, a_3, \dots$

تعریف دقیق تر

$\mathbb{R}$
حقیقی

منظور از یک دنباله در اعداد

یک تابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ است

$$
\begin{aligned}
1 &\mapsto a_1 \\
2 &\mapsto a_2 \\
3 &\mapsto a_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

مثال دنبالهٔ $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

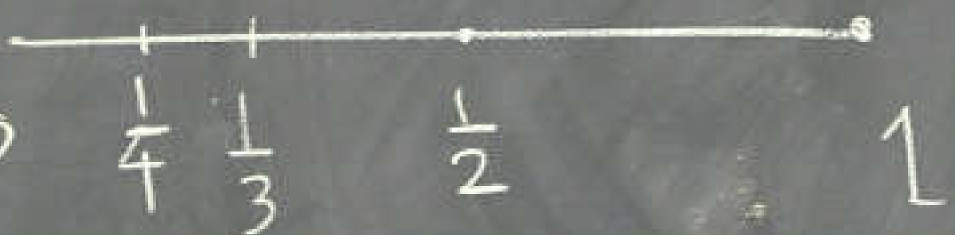
مثال $\{1\}_{n\in\mathbb{N}}$

$1, 1, 1, 1, \ldots$

در مورد هر دنباله دانستن دو چیز

ضروری است :

۱) اواخر دنباله چه خبر است (آیا عناصر دنباله در جائی تجمع می کنند) ← حد داشتن / یا نداشتن



۲ مجموع همهٔ اعضای دنباله

آیا وجود دارد؟

$$1+1+1+1+\cdots \quad ?$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

غیر دقیق
لفظی

می گوییم عناصر دنباله a_n

حول عدد L تجمع می کنند یا حدّ

دنباله a_n برابر با L است و می نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

هرگاه جملات دنباله a_n

در انتها به L نزدیک

بی‌نهایت

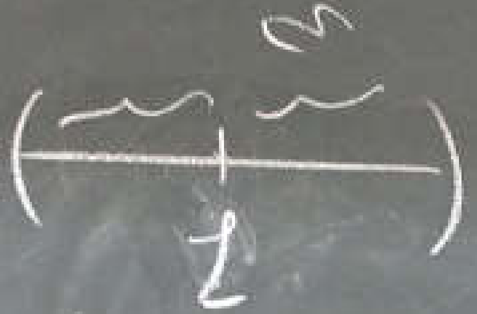
شوند

تعریف دقیق در حساب: ب

می‌گوییم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

هرگاه برای هر ε یک اندیس $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که

$$\forall n > N \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$$



$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

شما می‌دهید $\leftarrow \varepsilon$

من به شما می‌دهم $\leftarrow N(\varepsilon)$

$$a_0, a_1, \ldots\ldots, a_N$$

$$\underbrace{a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots}$$

مثال: نشان دهید که $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

اثبات: باید ثابت کنیم که اعضای این دنباله به هر اندازه‌ای

که بخواهیم به صفر نزدیک می‌شوند.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ به ما داده شده باشد. برای این که

$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ کافی است

$n>\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$

پس کافی است قرار دهیم $N(\varepsilon)=\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$

تمرین

فرض کنید $\{a_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ یک دنباله باشد

بطوری که

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$$

$$\lim a_{2n+1} = L$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad \ldots$$

$$a_2 \quad a_4 \quad a_6 \longrightarrow \ell$$

$$a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_7 \longrightarrow \ell$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$ أُبَكِسِ

تعریف فرض کنید $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله باشد:

مجموع زیر را یک **سری** می‌خوانیم:

Series

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

و آن را با $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نشان می‌دهیم

سیگما

مثال $a_n = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1+1+1+1+\dots$$

حاصلجمع بالا برابر با هیچ عددی نمی‌شود.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$$

$a_n = \frac{1}{n}$ Jin

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} +$$

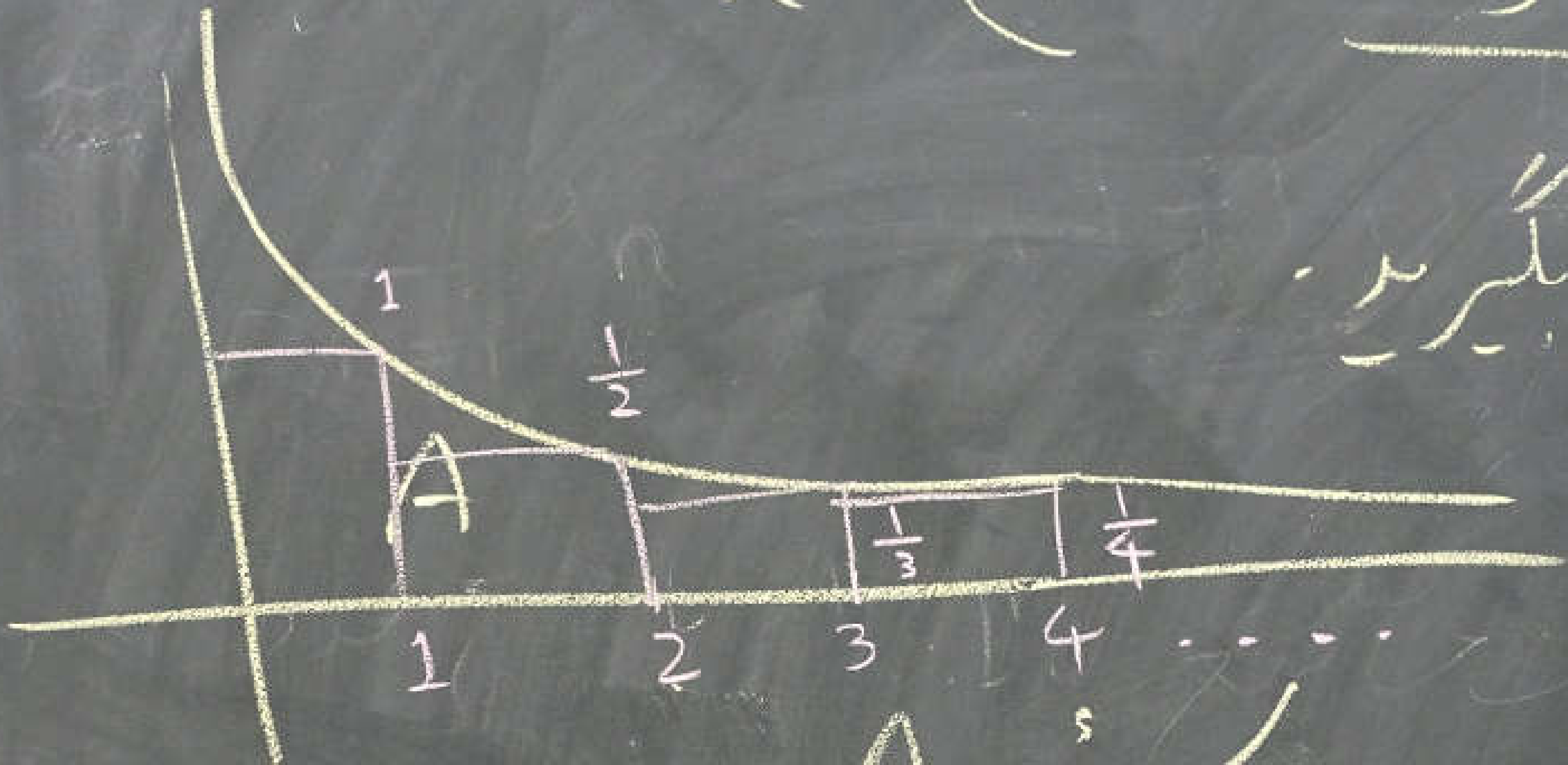
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

$$+ \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

سری مورد نظر

واگرا است.

تابع $y=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید.



هدف: محاسبه A

$A \geq$ مجموع حد $=$

متتالية

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Longrightarrow A \text{ [illegible]}$$

<u>مثال</u> دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{2^n}$ را در نظر بگیرید

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ؟$$

<u>یادآوری</u> (فشردگی) فرض کنید a_n و b_n

دو دنباله‌ی همگرا باشند و $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$

فرض کنید c_n یک دنباله باشد به طوری که

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

$$a_n \to L \qquad b_n \to L$$

آنگاه

$$\lim_{n \to \infty} c_n = L$$

داریم:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & \dfrac{1}{2^n} & \leq & \dfrac{1}{n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ را بیابید.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$

برای محاسبهٔ مجموع فوق به صورت زیر عمل می‌کنیم.

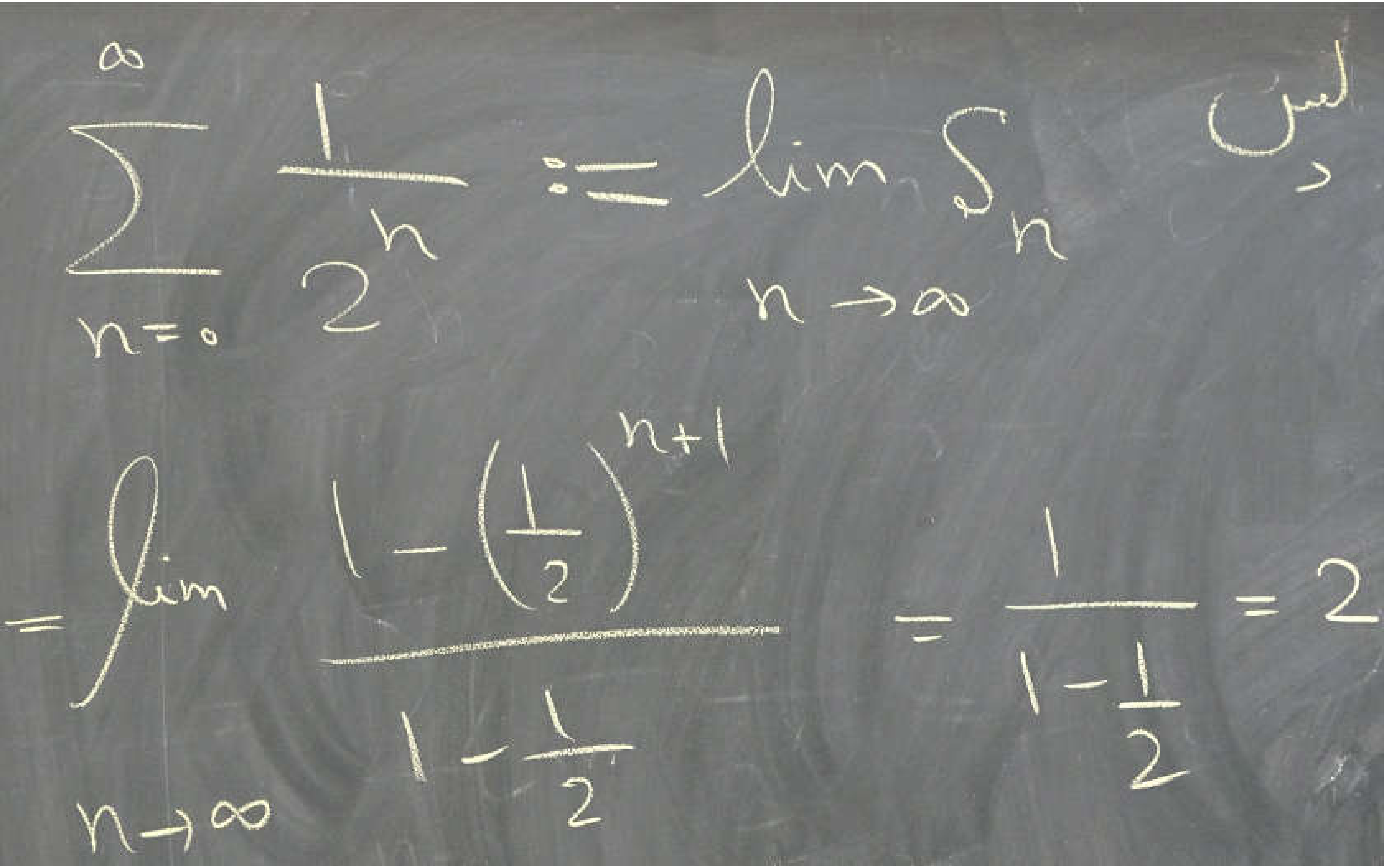
$$S_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$S_n - \frac{1}{2} S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$


$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} := \lim_{n \to \infty} S_n$
$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$