

مسائل پیشنهادی برای میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (ترم ۱-۹۷)

دنباله‌ها و سریها

۱. فرض کنید $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی نامنفی باشد. نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n)^n}{n!}$ همگرا است.

۲. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$ (ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{a^n + n^3}$ (ثابت $a > 0$)

پ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt[n]{n}}$ (ت) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \cos n}{n^2}$

ث) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ (ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$

چ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sinh(n)}$ (ح) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log_2(n+1)}$

خ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2n}}$

۳. ثابت کنید که سری زیر همگراست:

$$\sum \frac{1}{\sinh(n)}$$

۴. به ازای چه مقادیری از x سری زیر همگراست؟

$$\sum \left(\frac{2 \ln(x) + 3}{5}\right)^n$$

۵. شعاع و بازه همگرایی سری توان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^2 n}$ را تعیین کنید.

حد و پیوستگی

۶. وجود یا عدم وجود حدهای زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{[x]}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - [x^2]}{1 - x^2}$$

۷. (آ) برای هر $x \in \mathbb{R}$ نشان دهید $e^{x^2} \geq 1 + x^2$.

(ب) با استفاده از (آ) و ذکر دلیل حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}$$

۸. نشان دهید $\ln(c) = \frac{1}{1+c}$ که $c \in (0, \infty)$ وجود دارد به طوری که

۹. تابع f با ضابطه $f(x) = \tanh(x)$ مفروض است.

الف) دامنه و برد f را تعیین کنید و نشان دهید f بر دامنه خود تابعی پیوسته است.

ب) نشان دهید تابع پیوسته‌ای مانند g وجود دارد که برای هر $x \in \mathbb{R}$ $g(f(x)) = x$.

۱۰. بررسی کنید که تابع زیر در چه نقاطی پیوسته است (توجه: فعلاً حق استفاده از قاعده‌ی ل'Hôpital را نداریم).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} & x \geq 0 \\ |x|^{\sin(x)} & x < 0 \end{cases}$$

۱۱. تابع زیر در چه نقاطی پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \frac{\pi}{4} \\ \frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x) - 1} & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ |x|^{\sin(x)} & x < 0 \end{cases}$$

۱۲. عدد c را طوری بیابید که تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه ی زیر بر سراسر \mathbb{R} پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{|x|} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

مشق

۱۳. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & x > 0 \\ \cosh(x^2) - 1 & x \leq 0 \end{cases}$ مفروض است.

الف) ضابطه ی تابع f' را تعیین کنید.

ب) نشان دهید تابع f در $x = 0$ دو بار مشتق پذیر است.

۱۴. مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه ی $x = 0$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} (e^{\sinh(x)} - 1) \times \frac{x}{\tanh(x)} & x \geq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۱۵. الف) مشتق پذیری تابع f با ضابطه زیر را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ln(x+1) & x \geq 0 \\ (x^2 + 1)^{\cosh(x)} - 1 & x < 0 \end{cases}$$

ب) نشان دهید تابع f بر $\mathbb{R} - \{0\}$ مشتق پذیر است و سپس ضابطه تابع مشتق را بدست آورید.

۱۶. فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد.

(آ) نشان دهید نقطه $c \in [a, b]$ وجود دارد به طوری که

$$f(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

(ب) فرض کنید $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ مجموعه ای از نقاط در $[a, b]$ باشند. نشان دهید نقطه $c \in [a, b]$ وجود دارد به طوری که

$$f(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i).$$