پاسخ سؤال اول:

روش اول: روشن است که

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \frac{a_n}{n+a_n} < a_n$$

از طرفی طبق فرض سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست. بنابراین با توجه به آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+a_n}$ نیز همگراست.

روش دوم:

$$\text{سری } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگراست} \Longrightarrow \lim a_n = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{a_n}{n+a_n}}{a_n} = \dfrac{1}{n+a_n} \longrightarrow 0 \\ \text{سری } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگراست} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

بنابر آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+a_n}$ همگراست

قسمت دوم سوال اول:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگراست} \Longrightarrow \lim a_n = 0$$

اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار دهیم $b_n = \frac{1}{n}$، آنگاه داریم

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{1+a_n}{n+a_n}}{b_n} = \dfrac{1+a_n}{1+\frac{a_n}{n}} \longrightarrow \dfrac{1+0}{1+0} = 1 \\ \text{سری همساز } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ واگراست} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

بنابر آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+a_n}{n+a_n}$ واگراست.