به نام خالق مهربان پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۷

---

۱. الف) همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ را با ذکر دلیل تعیین نمایید.

ب) دامنه همگرایی سری توان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}(x-2)^n$ را تعیین کنید. پاسخ سؤال اول. (۱۵ نمره)

(الف) ابتدا نشان می‌دهیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ واگراست. روش اول (آزمون مقایسه). (۴ نمره)

به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

از آنجا که سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ نیز واگراست. روش دوم (آزمون مقایسه‌ی حدی). داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 > 0$$

از آنجا که سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ نیز واگراست.

ادامه پاسخ سوال اول. اکنون نشان می‌دهیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ همگراست. به وضوح دنباله $\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\}$ مثبت، نزولی و همگرا به صفر است. در نتیجه بنا بر آزمون لایب‌نیتز، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ همگراست. با توجه به واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ همگرای مشروط است. (ب) روش اول (آزمون نسبت). به ازای هر (۴ نمره)

(۷ نمره)

عدد حقیقی $x \neq 2$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x-2|^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}}{\frac{|x-2|^n}{\sqrt{n^2+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}|x-2| = |x-2|$$

با توجه به آزمون نسبت، به ازای هر عدد حقیقی $x \neq 2$ با شرط $|x-2| < 1$، سری همگرای مطلق است. همچنین به ازای هر عدد حقیقی x با شرط $|x-2| > 1$، دنباله $\left\{\frac{|x-2|^n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$ واگرا به بی‌نهایت است که نتیجه می‌دهد دنباله $\left\{\frac{(x-2)^2}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$ همگرا به صفر نیست و لذا طبق آزمون واگرایی، سری واگراست. پس به ازای هر عدد حقیقی $1 < x < 3$، سری همگرای مطلق (و لذا همگرا) و به ازای هر $x < 1$ و هر $x > 3$، سری واگراست. به ازای $x = 1$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ را به دست می‌آوریم که طبق قسمت (الف) همگرای مشروط است و به ازای $x = 3$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ را به دست می‌آوریم که بنا بر قسمت (الف) واگراست. بنابراین دامنه‌ی همگرایی بازه $(1, 3]$ است.

روش دوم (آزمون ریشه). داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x-۲|^n}{\sqrt{n^۲+۱}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-۲|}{\left(\sqrt[n]{n^۲+۱}\right)^{\frac{۱}{۲}}} = |x-۲|$$

با توجه به آزمون ریشه، به ازای هر عدد حقیقی x با شرط $|x-۲| < ۱$، سری همگرای مطلق است. همچنین به ازای هر عدد حقیقی x با شرط $|x-۲| > ۱$، بنا بر آزمون ریشه، دنباله $\left\{\frac{|x-۲|^n}{\sqrt{n^۲+۱}}\right\}$ واگرا به بی‌نهایت است که نتیجه می‌دهد دنباله $\left\{\frac{x-۲}{\sqrt{n^۲+۱}}\right\}$ همگرا به صفر نیست و لذا طبق آزمون واگرایی، سری واگراست. پس به ازای هر عدد حقیقی $۱ < x < ۳$، سری همگرای مطلق (و لذا همگرا) و به ازای هر $x < ۱$ و هر $x > ۳$، سری واگراست. به ازای $x = ۱$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n^۲+۱}}$ را به دست می‌آوریم که طبق قسمت (الف) همگرای مشروط است و به ازای $x = ۳$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱}}$ را به دست می‌آوریم که بنا بر قسمت (الف) واگراست. بنابراین دامنه‌ی همگرایی بازه $[۱, ۳)$ است.

۲. نشان دهید تابع f با ضابطه زیر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. (توجه: استفاده از قاعده هوپیتال مجاز نیست.)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ (\sqrt{|x|})^x & x < 0 \end{cases}$$

پاسخ سؤال دوم. نخست بررسی می‌کنیم که تابع مورد نظر در $x > 0$ پیوسته است. تابعِ $(1+x)$ تابعی پیوسته است و در $x > 0$ داریم $1+x > 0$، یعنی $1+x$ در دامنه‌ی تابع $\ln$ قرارمی‌گیرد که این تابع نیز پیوسته است. پس تابعِ $\ln(1+x)$ پیوسته است. حال از (۱۵ نمره)

آنجا که $x > 0$ تابعِ $\frac{\ln(1+x)}{x}$ نیز پیوسته است. حال نشان می‌دهیم که این تابع در $x < 0$ نیز پیوسته است. تابعِ $|x|$ در $x < 0$ پیوسته است و از آنجا که $|x| > 0$، تابعِ $\sqrt{|x|}$ در $x < 0$ تعریف شده و پیوسته است. همچنین داریم $\sqrt{|x|}^x = e^{x \ln \sqrt{|x|}}$. حال از آنجا که $|x| > 0$ و از آنجا که $\ln$ در $x > 0$ پیوسته است، تابع $\ln \sqrt{|x|}$ و به تَبَع آن تابع $x \ln \sqrt{|x|}$ پیوسته است. ترکیب این تابع، با تابعِ e^x نیز که تابع مورد نظر سوال است، تابعی پیوسته است. برای اثبات پیوستگی تابع در نقطه‌ی $x = 0$ باید نشان دهیم که (۲ نمره) (۲نمره)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

توجه می‌کنیم که بنا به ضابطه‌ی تابع، داریم $f(0) = 1$. همچنین:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} && (\text{بنا به ضابطه تابع}) \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} && (\text{تغییر متغیر برای آشناتر شدن صورت}) \\ &= \ln(x)'(1) && (\text{بنا به تعریف مشتق تابع لگاریتم طبیعی در نقطه یک}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(۵ نمره)

ادامه پاسخ سوال دوم.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}(\sqrt{|x|})^x && (\text{بنا به ضابطه تابع})\\
&= \lim_{x\to 0^-}(\sqrt{(-x)})^x\\
&= \lim_{x\to 0^-} e^{x\ln(\sqrt{(-x)})} && (\text{بنا به تعریف تابع نمایی})\\
&= e^{\lim_{x\to 0^-} x\ln(\sqrt{-x})} && (\text{بنا به پیوستگی تابع نمایی})\\
&= e^{\lim_{x\to 0^+}(-x)\ln(\sqrt{x})} && (\text{تغییر متغیر})\\
&= e^{\lim_{t\to -\infty}(-e^t)\ln(\sqrt{e^t})} && (\text{تغییر متغیر } x=e^t)\\
&= e^{\lim_{t\to -\infty}(-e^t)\ln(e^{\frac{t}{2}})}\\
&= e^{\lim_{t\to -\infty}(-e^t)(\frac{t}{2})}\\
&= e^{\lim_{t\to +\infty}(-e^{(-t)})(\frac{-t}{2})} && (\text{تغییر متغیر})\\
&= e^{\lim_{t\to +\infty}\frac{t}{2e^t}} = e^0 = 1 && (\text{بنا به این که طبق تعریف داریم } e^t > \frac{t^2}{2})
\end{aligned}$$

(۸ نمره)

---

۳. الف) نشان دهید تابع f با ضابطه $f(x) = (1+x^2)\ln x$ بر $(0,+\infty)$ پیوسته است.

ب) نشان دهید $c \in (0,+\infty)$ وجود دارد که $\ln c = \frac{1}{1+c^2}$. پاسخ سؤال سوم. (۱۵ نمره)

الف) تابع f حاصل ضرب توابع پیوسته است و بنابراین خود پیوسته است. (۳ نمره)

ب) تابع کمکی $g(x) = (1+x^2)\ln x - 1$ را تعریف میکنیم. (۴ نمره)

تابع g بر بازه بسته $[1,e]$ پیوسته است و $g(1) = -1 < 0$ و $g(e) = (1+e^2) - 1 = e^2 > 0$. (۵ نمره)

در نتیجه بنا قضیه بولتزانو نقطه $c \in (1,e)$ وجود دارد به طوری که $g(c) = (1+c^2)\ln c - 1 = 0$. (۳ نمره)

۴. مشتق‌پذیری تابع f با ضابطه زیر را بر $\mathbb{R}$ بررسی کنید و ضابطه تابع f' را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} \tanh(\frac{۱+x}{x^{۲}}) & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

پاسخ سؤال چهارم. (۱۵ نمره)

اگر $x \neq ۰$ آنگاه $\frac{۱+x}{x^{۲}}$ تقسیم دو تابع مشتق‌پذیر است و درنتیجه مشتق‌پذیر است و (۱ نمره)

مشتق آن برابر است با $\frac{x^{۲} - ۲x(۱+x)}{x^{۴}} = -\frac{x^{۲}+۲x}{x^{۴}}$. (۱ نمره)

تابع $\tanh(x)$ تابعی مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر است با $\text{sech}^{۲}(x)$. (۱ نمره)

با توجه به اینکه ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر تابعی مشتق‌پذیر است، پس $\tanh(\frac{۱+x}{x^{۲}})$ نیز تابعی مشتق‌پذیر است. (۱ نمره)

مشتق آن برابر است با $-\frac{x^{۲}+۲x}{x^{۴}} \text{sech}^{۲}(\frac{۱+x}{x^{۲}})$. حاصلضرب دوتابع مشتق‌پذیر تابعی مشتق پذیر است بنابراین: (۲ نمره)

$$f'(x) = ۲x \tanh(\frac{۱+x}{x^{۲}}) - \frac{x+۲}{x} \text{sech}^{۲}(\frac{۱+x}{x^{۲}}).$$

(۲ نمره)

اگر $x = ۰$، با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{x^{۲}\tanh(\frac{۱+x}{x^{۲}})}{x} = \lim_{x\to ۰} x \tanh(\frac{۱+x}{x^{۲}}).$$

(۳ نمره)

چون $\tanh(x)$ تابعی کراندار است $(-۱ < \tanh(x) < ۱)$ و $\lim_{x\to ۰} x = ۰$، بنابر قضیه، (۱ نمره)

$$\lim_{x\to ۰} x \tanh(\frac{۱+x}{x^{۲}}) = ۰.$$

(۲ نمره)

در نتیجه ضابطه‌ی تابع مشتق برابراست با :

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x \tanh(\frac{۱+x}{x^۲}) - \frac{x+۲}{x} \operatorname{sech}^۲(\frac{۱+x}{x^۲}) & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases} .$$

(۱ نمره)