پاسخ آزمون میان ترم ریاضی عمومی یک
آبان ماه ۱۳۹۶

---

۱. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.(۱۵ نمره)

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\cosh n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{e^n}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$

حل: الف) می دانیم $\frac{n^3}{\cosh n}$ همواره مثبت است پس می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. داریم

$$\cosh n = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \geq \frac{e^n}{2} \geq \frac{n^5}{2 \times 5!}.$$

بنابراین

$$\frac{n^3}{\cosh n} \leq (2 \times 5!) \frac{n^3}{n^5} = \frac{240}{n^2}.$$

چون سری $240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{240}{n^2}$ همگراست. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cosh n}$ نیز همگراست.

ب) چون $n > 0$ پس $\tanh n$ مثبت است و می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. با توجه به این که $1 \leq \tanh n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$ خواهیم داشت

$$\frac{\tanh n}{e^n} \leq \frac{1}{e^n}.$$

اما سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{e}$ است که $0 < \frac{1}{e} < 1$ و لذا همگرا است. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{e^n}$ نیز همگراست.

ج) واضح است که $(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ همواره مثبت است، پس می‌توان از آزمون ریشه استفاده کرد. داریم

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

اما طبق مثال حل شده دنباله $(\frac{n+1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n$ همگرا به عدد e است که $2 < e < 3$. پس دنباله $(\frac{n}{n+1})^n$ همگرا به عدد $\frac{1}{e}$ است که $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$. پس طبق آزمون ریشه سری همگرا است.

راه دوم (استفاده از آزمون مقایسه). طبق مثال حل شده، دنباله $(1+\frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$ یک دنباله صعودی است. پس همه جملات از جمله اول بزرگتر یا مساوی است. پس

$$(\frac{n+1}{n})^n \geq (\frac{2}{1})^1 = 2.$$

بنابراین

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \left((\frac{n}{n+1})^n\right)^n \leq (\frac{1}{2})^n.$$

اما سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است و لذا همگرا است. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ نیز همگراست.

---

۲. به ازای چه مقادیری از $x \in \mathbb{R}$، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+4)^n}{5^n(n+5)}$ همگرای مطلق، همگرای مشروط و یا واگرا است؟(۱۵ نمره)

حل.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+4)^n}{5^n(n+5)} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{5})^n\frac{(x+2)^n}{n+5}$$

$$\lim\frac{|(\frac{2}{5})^{n+1}\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+6)}|}{|(\frac{2}{5})^n\frac{(x+2)^n}{(n+5)}|} = \lim\frac{2(n+5)}{5(n+6)}|x+2| = \frac{2}{5}|x+2|$$

پس برای $\frac{2}{5}|x+2| < 1$، یعنی $x \in (-\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$، بنابر آزمون نسبت، سری فوق همگرای مطلق است. (۷ نمره)

به ازای $x = \frac{1}{2}$، سری همان سری همساز $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+5} = \sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n}$ و در این حالت سری واگرا است. (۲ نمره)

به ازای $x = -\frac{9}{2}$ سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$ است. در این حالت، از این که $\{\frac{1}{n+5}\}$ دنباله‌ای مثبت، نزولی و همگرا به صفر است، طبق آزمون لایبنیتس سری همگرای مشروط است (در این حالت همگرای مطلق نیست). (۲ نمره)

برای $x < -۱$ یا $x > ۵$، یعنی $\frac{۲}{۵}|x+۲| > ۱$ نشان می‌دهیم سری واگراست. برای این منظور کافی است نشان دهیم جمله‌ی عمومی سری به صفر همگرا نیست. داریم $a_n := |(\frac{۲}{۵})^n \frac{(x+۲)^n}{n+۵}| > ۰$ و

$$\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim \frac{۲(n+۵)}{۵(n+۶)}|x+۲| = \frac{۲}{۵}|x+۲| > ۱$$

به این ترتیب از یک اندیس $N.$ به بعد داریم $a_{n+۱} > a_n$ و در نتیجه برای هر $n > N.$، $a_n > a_{N.} > ۰$. پس $\lim a_n \geq a_{N.} > ۰$. در نتیجه در این حالت سری واگرا است. (۴ نمره)

---

۳. نشان دهید $c \in (۰, \infty)$ وجود دارد به طوری که $۲^c = c^c \ln c$. (۱۰ نمره)

حل. با استفاده از قضیه بولزانو وجود c را ثابت می‌کنیم. ابتدا تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = ۲^x - x^x \ln(x) = e^{x \ln ۲} - e^{x \ln(x)} \ln(x)$$

دامنه f بازه $(۰, \infty)$ است و تابع روی دامنه خود پیوسته است زیرا توابع $\ln$ و نمایی هر دو پیوسته هستند. در نتیجه تابع f روی بازه بسته $[۱, e]$ پیوسته است. همچنین داریم

$$f(۱) = ۲ > ۰ \quad , \qquad f(e) = ۲^e - e^e < ۰.$$

بنابراین بنا به قضیه بولزانو c در $(۱, e)$ وجود دارد که

$$f(c) = ۰.$$

یعنی $c \in (۰, \infty)$ بدست آوردیم که $۲^c = c^c \ln c$.

---

۴. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲ \sin(۱/x)}{e^x - ۱} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ مفروض است. (۲۰ نمره)

الف) پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع f را در صفر بررسی کنید.

ب) ضابطه‌ی مشتق f را در نقاطی تعیین کنید که تابع مشتق‌پذیر است.

حل. الف) برای بررسی پیوستگی تابع f در $x = 0$، عبارت $\lim_{x\to 0} f(x)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{e^x - 1} = x\sin(\frac{1}{x})\frac{x}{e^x - 1}$$

اگر قرار دهیم $g(x) = e^x$ آنگاه $g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$. در نتیجه با توجه به اینکه $g'(x) = e^x$ خواهیم داشت $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = g'(0) = 1$ و در نتیجه $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$. در عین حال با توجه به کرانداری $\sin(\frac{1}{x})$ داریم $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$. بنابر این

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})\frac{x}{e^x - 1} = 0 \times 1 = 0 = f(0)$$

پس f در $x = 0$ پیوسته است.

برای بررسی مشتق‌پذیری f در $x = 0$، به بررسی $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{e^x - 1}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\frac{1}{x})}{e^x - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})\frac{x}{e^x - 1}
\end{aligned}$$

بنابر آنچه در قسمت قبل بیان کردیم $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$. همچنین می‌دانیم $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ وجود ندارد. پس حد فوق وجود نخواهد داشت. یعنی تابع f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

ب) برای هر $x \neq 0$، با توجه به مشتق‌پذیری هر یک از عبارات $\sin(\frac{1}{x})$، x^2 و $e^x - 1$، و اینکه برای $x \neq 0$، $e^x - 1 \neq 0$، بنابر قضایای بیان شده، تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر است. داریم

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x\sin(\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2})\cos(\frac{1}{x}))(e^x - 1) - (x^2\sin(\frac{1}{x}))(e^x)}{(e^x - 1)^2} \\
&= \frac{(2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}))(e^x - 1) - (x^2\sin(\frac{1}{x}))(e^x)}{(e^x - 1)^2}
\end{aligned}$$