در تکمله‌ی پیش رو کوشیده‌ام تا قضایای مقدار میانی و مقدار اکسترمم مطلق (برای توابع پیوسته) را با ریاضیات مقدماتی (تنها با استفاده از نابرابری‌ها) ثابت کنم. اثبات‌های پیش رو برای دانشجویان علاقه‌مند (به خصوص دانشجویان رشته‌ی ریاضی) مفید خواهند بود. اثبات‌های دیگری برای این قضایا

در درس مبانی آنالیز ارائه می‌شود.

لم اول

هر دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار در $\mathbb{R}$ همگراست.

توجه:

اصل کمال: هر زیرمجموعه‌ی از بالا کراندار از $\mathbb{R}$ دارای کوچکترین کران بالاست.

اثبات لم) فرض کنید a_n یک دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار باشد. آنگاه

$$A=\{a_i \mid i\in\mathbb{N}\}$$

یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ است که بنا به اصل کمال، دارای کوچکترین کران بالاست. فرض کنید s کوچکترین کران بالای A باشد. آنگاه برای هر $\varepsilon>0$ عدد $s-\varepsilon$ کران بالای A نیست.

پس برای هر $\varepsilon>0$ عدد $a_n\in A$ موجود است بطوری که

$$s-\varepsilon<a_n.$$

واضح است که $a_n<s+\varepsilon$.

پس

$$s-\varepsilon<a_n<s+\varepsilon$$

از آنجا که a_n صعودی است، از جایی به بعد برای تمام nها داریم

$$s-\varepsilon<a_n<s+\varepsilon.$$

و این دقیقاً یعنی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s.$$

$\square$

ب) فرض کنید دنباله a_n همگرا باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > l$.

آن گاه کلیه جملات دنباله از جایی به بعد از l بزرگتر هستند.

اثبات: فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l' > l$. برای هر $\varepsilon > 0$، یک $N \in \mathbb{N}$ موجود است

به طوری که برای هر $n > N$ داریم

$$l' - \varepsilon < a_n < l' + \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$(l' - l) - \varepsilon < a_n - l < (l' - l) + \varepsilon$$

عدد $l' - l$ مثبت است. در نتیجه ε را به اندازه‌ای کوچک در نظر می‌گیریم که $(l' - l - \varepsilon) > 0$.

پس $a_n - l$ از N به بعد مثبت خواهد بود. یعنی از N به بعد داریم $l < a_n$.

۲) فرض کنید a_n دنباله‌ای در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ باشد که همگراست.

آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n \in [a,b]$.

اثبات: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n > b$ آن‌گاه از جایی به بعد باید جملات دنباله از b بیشتر باشند

ولی فرض کرده‌ایم که جملات دنباله در بازه‌ی $[a,b]$ واقع شده‌اند. به همین ترتیب با فرض

$\lim_{n\to\infty} a_n < a$ نیز به تناقض می‌رسیم.

لم) اگر a_n یک دنباله نامتناهی در بازه‌ی $[a,b]$ باشد، آنگاه a_n دارای یک زیردنباله همگرا است (که حد این زیردنباله نیز لزوماً در بازه بسته $[a,b]$ واقع است).

اثبات: دنباله b_k را به صورت زیر بسازید: $b_0=a$. حال اگر در دنباله a_n عنصری بزرگتر از a وجود دارد، قرار دهید $b_1=a_k$ که k اولین اندیسی است که a_k از a بزرگتر است.

اگر این کار تا بی‌نهایت ادامه یابد به یک دنباله صعودی b_k می‌رسیم.

وگرنه این کار پس از تعداد متناهی مرحله متوقف شود دنباله c_k را به صورت زیر می‌سازیم.

$c_0=a$ و فرض می‌کنیم $c_1=a_k$ که در آن k اولین اندیسی است که $a_k<a$.

این روند تا بی‌نهایت در دنباله نزولی c_k ادامه دارد (در غیر این صورت دنباله a_n متناهی خواهد بود). اگر دنباله b_k ساخته شود آن دنباله صعودی و از بالا کران‌دار و همگرا است.

و اگر c_k ساخته شود آن دنباله نزولی و از پایین کران‌دار و لذا همگرا است.

قضیه مقدار میانی

فرض کنید تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)<0$, $f(b)>0$.
آن‌گاه نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ یافت می‌شود به طوری که $f(c)=0$.

اثبات

قرار دهید $a_0=a$, $b_0=b$. دنباله‌های a_n و b_n را به صورت زیر می‌سازیم.

اگر $f(\frac{a_0+b_0}{2})>0$ آن‌گاه قرار دهید $a_1=a_0$, $b_1=\frac{a_0+b_0}{2}$

اگر $f(\frac{a_0+b_0}{2})<0$ قرار دهید $a_1=\frac{a_0+b_0}{2}$, $b_1=b_0$

به همین ترتیب روند نصف‌سازی بازه‌ها را ادامه می‌دهیم و دنباله‌های (a_n) , (b_n) حاصل می‌شوند. دقت کنید که a_n صعودی و از بالا کراندار است و b_n نزولی و از پایین کراندار است. پس هر دو همگرا هستند و هر دو در بازه $[a,b]$ واقع است.

همچنین دقت کنید که $|a_n-b_n|<\frac{1}{2^n}$. بنا به روش نصف‌سازی بازه‌ها.

بنابراین $\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$. پس $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.

یعنی $\lim a_n=\lim b_n$. همچنین بنا به پیوستگی تابع $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)=l$.

حال دقت کنید که دنباله $f(a_n)$ دنباله منفی است. پس $\lim f(a_n)\le 0$. یعنی $l\le 0$.

از طرفی دنباله $f(b_n)$ دنباله مثبت است. پس $\lim_{n\to\infty}f(b_n)\ge 0$ یعنی $l\ge 0$. پس

$l\le 0$ و $l\ge 0$. نتیجه $l=0$. لذا $l=f(\lim_{n\to\infty}a_n)=0$ و $\lim a_n$ نقطه مطلوب است.

قضیه.

اگر تابع f یک تابع پیوسته در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ باشد.

آن‌گاه تابع f در این بازه کراندار است.

اثبات: فرض کنید تابع f در این بازه کراندار (از بالا) نباشد. در این صورت یک دنباله‌ی $f(a_n)$ از عناصر $a_n \in [a,b]$ یافت می‌شود به طوری که $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = +\infty$.

دنباله‌ی a_n دارای یک زیردنباله‌ی همگرا به نام b_k است. از طرفی $f(b_k)$ یک زیردنباله از دنباله‌ی $f(a_n)$ است پس باید داشته باشیم $\lim_{k\to\infty} f(b_k) = +\infty$. اما این امکان‌پذیر نیست زیرا

$$\lim_{k\to+\infty} f(b_k) = f(\lim_{k\to\infty} b_k) \to \text{مقداری محدود}$$

قضیه: فرض کنید تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد. آن گاه f در این بازه دارای ماکزیمم است.

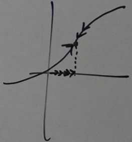
اثبات: در قضیه قبل گفتیم که مقادیر f از بالا کراندار است. فرض کنید s کوچکترین کران بالای $\{f(x) \mid x\in[a,b]\}$ باشد.

$s-\frac{1}{n}$ دیگر کران بالای برای مقادیر f نیست. پس برای هر n عددی مانند $x_n\in[a,b]$ وجود دارد به طوری که $s\geq f(x_n)>s-\frac{1}{n}$ باشد. در این صورت برای هر عدد n، عدد x_n ... دنباله x_n دارای یک زیردنباله همگرای x_{n_k} است.

داریم $s\geq f(x_{n_k})>s-\frac{1}{k}$. بنابراین $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=s$. از طرفی $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k})$ یعنی در بازه $[a,b]$ مقدار f در این نقطه ماکزیمم شده است.

تعمیم: فرض کنید تابع f در یک بازه‌ی I (چه باز چه بسته)
تعریف شده، پیوسته و یک به یک باشد. آنگاه $f^{-1}: f(I) \to I$
نیز پیوسته است.

اثبات: فرض کنید $\{f(x_n)\}$ دنباله‌ای در دامنه‌ی f^{-1} باشد که به عدد $f(l)$ همگراست: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(l)$.



بدون کاستن از کلیت فرض کنید $f(x_n)$ صعودی است. آنگاه x_n نیز صعودی است. اگر x_n همگرا باشد آنگاه
پس کافی است نشان دهیم که x_n همگراست.

$x_n \to l$ زیرا اگر $x_n \to l' \neq l$ آنگاه $f(x_n) \to f(l') \neq f(l)$. پس

x_n صعودی است و برای هر n داریم $x_n \leq l$. زیرا اگر $l < x_n$ آنگاه $f(x_n) > f(l)$ و این با همگرا بودن $f(x_n)$ به $f(l)$

در تناقض است. پس x_n صعودی و از بالا کراندار است و لذا همگراست.