حل تکلیف سری اول درس ریاضی عمومی ۱

۱. حد هر یک از دنباله‌های زیر را با ذکر دلیل تعیین نمایید.

الف) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(n^3+1)$ 　　　 ب) $a_n = \sqrt{n^3+2n} - \sqrt{n^3+1}$

حل: الف)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| = |\frac{1}{\sqrt{n}} \sin(n^3+1)| = |\frac{1}{\sqrt{n}}|\,|\sin(n^3+1)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

با توجه به اینکه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$، بنابر قضیه‌ی فشردگی خواهیم داشت $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. در نتیجه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز همگرا به صفر است.

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^3+2n} - \sqrt{n^3+1} = \frac{(\sqrt{n^3+2n} - \sqrt{n^3+1})(\sqrt{n^3+2n} + \sqrt{n^3+1})}{(\sqrt{n^3+2n} + \sqrt{n^3+1})} \\ &= \frac{n^3+2n-n^3-1}{\sqrt{n^3+2n}+\sqrt{n^3+1}} = \frac{2n-1}{\sqrt{n^3+2n}+\sqrt{n^3+1}} \end{aligned}$$

با تقسیم صورت و مخرج عبارت اخیر بر $\sqrt{n^3}$، خواهیم داشت

$$a_n = \frac{\frac{2n-1}{\sqrt{n^3}}}{\frac{\sqrt{n^3+2n}+\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n^3}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}} \to \frac{0}{2} = 0$$

۲. فرض کنید دنباله‌ی همگرای $a_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$ حدی برابر α داشته باشد. حد هر یک از دنباله‌های زیر را بر حسب α تعیین کنید.

الف) $b_n = (۱+\frac{۱}{n})^{n+۴}$ ب) $c_n = (۱+\frac{۱}{n})^{۲n}$ ج) $d_n = (\frac{n}{n+۱})^n$

حل: الف) داریم

$$b_n = (۱ + \frac{۱}{n})^{n+۴} = (۱ + \frac{۱}{n})^n (۱ + \frac{۱}{n})^۴$$

با توجه به فرض، $\alpha \longrightarrow (۱ + \frac{۱}{n})^n$. همچنین $۱ \longrightarrow (۱ + \frac{۱}{n})$ و از آنجا $۱ \longrightarrow (۱ + \frac{۱}{n})^۴$. در نتیجه

$$b_n = (۱ + \frac{۱}{n})^{n+۴} = (۱ + \frac{۱}{n})^n (۱ + \frac{۱}{n})^۴ \longrightarrow \alpha \cdot ۱ = \alpha$$

ب)

$$c_n = (۱ + \frac{۱}{n})^{۲n} = \big((۱ + \frac{۱}{n})^n\big)^۲ \longrightarrow \alpha^۲$$

ج)

$$d_n = (\frac{n}{n+۱})^n = (\frac{۱}{۱ + \frac{۱}{n}})^n = \frac{۱}{(۱ + \frac{۱}{n})^n} \longrightarrow \frac{۱}{\alpha}$$

حل تکلیف سری اول درس ریاضی عمومی ۱

۳. دنباله‌ی $\{a_n\}$را دنباله‌ای بازگشتی نامیم هرگاه جمله‌ی آغازین (یا چند جمله‌ی آغازین) دنباله داده شده باشد و جمله‌ی a_n به جمله‌ی $a_{n-۱}$ یا چند جمله‌ی قبل از خود وابسته باشد. نشان دهید دنباله‌ی بازگشتی $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ با دستور $a_۱ = ۱$ و $a_n = \sqrt{۳ + ۲a_{n-۱}}$، برای $n \geq ۲$، دنباله‌ای صعودی است. نشان دهید این دنباله همگرا است.

حل: با توجه به دستور بازگشت دنباله، $a_۱ = ۱ < \sqrt{۵} = \sqrt{۳ + ۲a_۱} = a_۲$. برای $k \geq ۲$، فرض کنیم $a_k > a_{k-۱}$. در این صورت

$$۳ + ۲a_k > ۳ + ۲a_{k-۱} \ \Rightarrow\ \sqrt{۳ + ۲a_k} > \sqrt{۳ + ۲a_{k-۱}} \ \Rightarrow\ a_{k+۱} > a_k$$

به این ترتیب، با استفاده از استقرای ریاضی، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_{n+۱} > a_n$. یعنی $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی است. با توجه به خاصیت دنباله‌های یکنوا، برای اثبات همگرایی این دنباله، کافی است ثابت کنیم این دنباله از بالا کراندار است. این کار را نیز با استفاده از استقرا انجام می‌دهیم.

$$a_۱ = ۱ < ۳, \quad a_۲ = \sqrt{۵} < ۳, \quad a_۳ = \sqrt{۳ + ۲\sqrt{۵}} < \sqrt{۳ + ۲ \times ۳} = ۳.$$

برای$k \geq ۳$، فرض کنیم$a_k < ۳$. در این صورت$a_{k+۱} = \sqrt{۳ + ۲a_k} < \sqrt{۳ + ۲ \times ۳} = ۳$. پس به استقرا، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n < ۳$. به این ترتیب، $\{a_n\}$ دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار بوده، در نتیجه همگرا است.

۴. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را تحقیق نمایید.

الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$

ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

ج) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

د) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)(3^n+1)}$

حل: الف)

$$0 \leq a_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} \leq b_n = \frac{1}{n^2}$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک سری فوق همساز با $p = 2 > 1$ است. در نتیجه همگرا است و بنا بر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ نیز همگرا است.

ب) با اختیار $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$ و $b_n = \frac{1}{n^2}$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

از آنجا که سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است، بنا به آزمون مقایسه حدی سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$ نیز همگرا است.

ج) اگر قرار دهیم $a_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

چون $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ سری داده شده واگرا است.

د)

$$a_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)(3^n+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{(2n-1)}{2n} \times \frac{1}{3^n+1} \leq \frac{1}{3^n}$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ یک سری هندسی با قدر نسبت $1 \leq \frac{1}{3}$ است. در نتیجه همگرا است و بنا به ازمون مقایسه سری داده شده نیز همگرا است.

حل تکلیف سری اول درس ریاضی عمومی ۱

۵. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات نامنفی و همگرا باشد، نشان دهید هر یک از سری‌های زیر همگرا است.

الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ ج) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_n^2+1}$

حل:

الف) طبق فرض سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است. در نتیجه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. بنابراین یک n_0 وجود دارد که برای هر $n \geq n_0$ داریم

$$0 \leq a_n^2 \leq a_n \leq 1.$$

پس بنا به آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ نیز همگرا است.

ب)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{a_n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n(a_n+1)} = 1$$

در نتیجه بنا به آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ نیز همگرا است.

ج) از آنجا که سری داده شده در قسمت (الف) همگرا است، مشابه قسمت (ب) نتیجه می‌شود سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_n^2+1}$ نیز همگرا است.