مدرسه‌ی تابستانی درس‌هایی درباره‌ی مجموعه‌های شبه‌جبری و زیرتحلیلی

دانشگاه صنعتی اصفهان

تابستان ۹۸

همان‌طور که از موضوع پیدا است، هدف از این مدرسه‌ی کوتاه درس‌هایی درباره‌ی مجموعه‌های شبه‌جبری و زیرتحلیلی است. در این درس به اثبات قضیه‌ای که در مرجع [۱] آورده شده است و توسط ویلکی[۱] ارائه شده است، می‌پردازیم.

مرجع اصلی:

[1] J. Denef and L. van den Dries, “P-adic and Subanalytic Sets”, Annals of Mathematics 128 (1988) 79-138.

[۱] Alex Wilkie

۱ جلسه‌ی اول: صورت مساله

در این جلسه به مرور کارهایی که قرار است در این درس انجام شود، می‌پردازیم.

میدان اعداد مختلط $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ را در نظر بگیرید.

تعریف ۱. مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{C}^n$ را ساخته‌شدنی می‌نامیم هرگاه ترکیبی بولی از مجموعه‌های به شکل زیر باشد:

$$\{\bar{x} | f(\bar{x}) = 0\}$$

که در آن f یک چندجمله‌ای با ضرایب در میدان اعداد مختلط ($f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$) است. منظور از ترکیب بولی از چنین مجموعه‌هایی، اشتراک و اجتماع این مجموعه‌ها و مکمل این مجموعه‌ها است. مجموعه‌های ساخته‌شدنی را همچنین می‌توان به عنوان ترکیبی بولی از مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی (ورایته‌ها) نیز تعریف کرد.

با توجه به این تعریف، واضح است که ترکیبات بولی مجموعه‌های ساخته‌شدنی، خود یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی است. اما این نکته در مورد تصویر مجموعه‌های ساخته‌شدنی در قضیه‌ی زیر آورده شده است.

قضیه ۲ (شوالی). *اگر $X \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ ساخته‌شدنی باشد، آنگاه تصویر X روی $\mathbb{C}^n$ نیز یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی است. علاوه‌بر این تصویر یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی تحت یک تابع چندجمله‌ای نیز یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی است.*

روش نظریه‌ی مدلی‌ای که برای اثبات این قضیه مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت زیر است. ابتدا ثابت‌می‌کنیم که ساختار $\mathcal{C}$ دارای خاصیت حذف سور است. به این معنی که هر فرمول دارای یک فرمول بدونِ سورِ معادل است. سپس با استفاده از حذف سور، ثابت می‌شود که مجموعه‌های ساخته‌شدنی دقیقاً مجموعه‌هایی هستند که با فرمول‌های بدون سور تعریف می‌شوند. بنابراین اگر مجموعه‌ی X توسط فرمول $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ تعریف شده باشد، تصویر X روی nــ مولفه‌ی اول ($\pi_n(X)$) توسط فرمول $\exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$، که یک فرمول با سور وجودی است، تعریف می‌شود. حال بنابر خاصیت حذف سور، فرمول $\exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ دارای یک معادل بدون سور است. پس مجموعه‌ی $\pi_n(X)$ یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی است.

یک نتیجه‌ی جالبتری که از حذف سور پذیرفتن این ساختار می‌توان نتیجه گرفت، اثبات قضیه‌ی ریشه‌های هیلبرت[2] است.

قضیه ۳ (قضیه‌ی ریشه‌ها). *فرض کنید $\mathbf{K}$ یک میدان بسته‌ی جبری باشد. در این صورت یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی و ایده‌آل‌های رادیکال وجود دارد.*

هدف از این درس بررسی قضایایی مشابه در مورد میدان اعداد حقیقی است. دقت کنید که میدان اعداد مختلط و اعداد حقیقی بسیار شبیه هم هستند ولی تفاوت‌های عمده‌ای نیز دارد. به‌عنوان مثال میدان اعداد مختلط، بسته‌ی جبری است درصورتی که میدان اعداد حقیقی این‌چنین نیست، به این معنی که چندجمله‌ای‌هایی وجود دارند که در میدان اعداد حقیقی جواب ندارند. برای مثال چندجمله‌ای $x^2 + 1 = 0$ در میدان اعداد حقیقی ریشه ندارد. با این حال چندجمله‌ای‌های با ضرایب فرد این میدان همواره دارای جواب هستند. تفاوت دیگر این دو میدان این است که میدان اعداد حقیقی میدانی مرتب است. به این معنی که

[2] Hilbert's Nullstellensatz

دارای یک ترتیب است که با اعمال میدان سازگار است. ولی در میدان اعداد مختلط را نمی‌توان مرتب کرد، برای اینکه به‌عنوان مثال $i^2 = -1$. ولی یکی از خواص ترتیب این است که توان دوم هر عددی، مثبت باشد.

با این حال میدان اعداد حقیقی دارای یک ویژگی بسیار جالبی است. تنها فاصله‌ای که میان اعداد حقیقی و بستار جبری آن وجود دارد، همان عنصر i، ریشه‌ی چندجمله‌ای $x^2 + 1 = 0$، است. به این معنی که میدان $\mathbb{R}(i)$ بسته‌ی جبری است.

حال به تعریف‌های مشابه در میدان اعداد حقیقی می‌پردازیم.

تعریف ۴. مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را شبه‌جبری[۳] می‌نامیم هرگاه X را بتوان به‌صورت ترکیبی بولی از مجموعه‌هایی به‌صورت زیر نوشت:

$$\{\bar{x} | f(\bar{x}) > 0\}$$

که در آن $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$. دقت کنید که مجموعه‌ی $\{\bar{x} | f(\bar{x}) = 0\}$ نیز یک مجموعه‌ی شبه‌جبری است. زیرا برابر اشتراک دو مجموعه‌ی $\{\bar{x} | f(\bar{x}) > 0\}^{\complement}$ و $\{\bar{x} | f(\bar{x}) < 0\}^{\complement}$ است.

واضح است که مجموعه‌های شبه‌جبری تحت ترکیبات بولی بسته هستند. همچنین مشابه قضیه‌ی شوالی، سوالی که اینجا مطرح می‌شود این است که آیا تصویر یک مجموعه‌ی شبه‌جبری، یک مجموعه‌ی شبه‌جبری است؟

قضیه ۵ (تارسکی). *فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ یک مجموعه‌ی شبه‌جبری باشد. آنگاه تصویر X روی $\mathbb{R}^n$ نیز شبه‌جبری است.*

این قضیه را در اوایل این درس ثابت خواهیم کرد. برای اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه‌ی شوالی، ابتدا ثابت می‌کنیم که ساختار $(\mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1)$ سورها را حذف می‌کند. سپس با توجه به اینکه مجموعه‌های شبه‌جبری دقیقاً مجموعه‌هایی هستند که با فرمول بدون سور تعریف می‌شوند و همچنین حذف سور این ساختار، نتیجه‌ی مطلوب را استنتاج می‌کنیم.

پروژه ۱. درباره‌ی قضیه‌ی حقیقی ریشه‌ها تحقیق کنید.

گابریلُف[۴] مشابه این نظریه را برای مجموعه‌ی توابع تحلیلی ارائه می‌دهد. در ادامه‌ی این درس به بیان اثبات قضایایی مشابه در این نظریه خواهیم پرداخت.

توابع تحلیلی توابعی هستند که توسط یک سری توانی قابل نمایش هستند. مهمترین ویژگی سری‌ها این است که دامنه‌ی همگرایی آنها یا یک نقطه است یا یک دیسک باز است. به بیانی دیگر، توابع تحلیلی دارای یک جرِم[۵] هستند. به بیانی دیگر اگر دو تابع تحلیلی (سری توانی) در یک دیسک باز کوچک با هم برابر باشند، این دو تابع تحلیلی یکسان هستند. بنابراین تمام توابعی که در یک دیسک با هم برابر هستند را یک تابع درنظر می‌گیریم. پس منظور از توابع تحلیلی، جرِم توابع تحلیلی است.

تعریف ۶. مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را شبه‌تحلیلی[۶] می‌نامیم هرگاه برای هر $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ یک همسایگی باز $U_{\bar{a}}$ از $\bar{a}$ موجود باشد به طوری که $X \cap U_{\bar{a}}$ ترکیبی بولی از مجموعه‌هایی به صورت زیر باشد:

$$\{\bar{x} | f(\bar{x} - \bar{a}) > 0\}$$

[۳] semialgebraic
[۴] Gabrielov
[۵] germ
[۶] semianalytic

که در آن f یک تابع تحلیلی است. توجه کنید که شرط $\bar{x} - \bar{a} \in D_f$ لازم است.

برخلاف مجموعه‌های شبه‌جبری، ترکیبات بولی مجموعه‌های شبه‌تحلیلی، مجموعه‌ی شبه‌جبری نیست.

تعریف ۷. مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را زیرتحلیلی[۷] می‌نامیم هرگاه برای هر $\bar{a} \in \mathbb{R}$ یک همسایگی $U_{\bar{a}}$ و یک مجموعه‌ی شبه‌تحلیلی $Y \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ موجود باشد به‌طوری که $X \cap U_{\bar{a}} = \pi_n(Y)$.

مهم‌ترین قضیه‌ای که در این دوره ثابت خواهیم کرد، قضیه‌ی زیر خواهد بود.

قضیه ۸ (گابریلُف)**.** *مکمل هر مجموعه‌ی زیرتحلیلی، یک مجموعه‌ی زیرتحلیلی است.*

از آنجایی که در تعریف مجموعه‌های زیرتحلیلی، تصویر گرفتن آورده شده است، بسته بودن این مجموعه‌ها نسبت به مکمل‌گیری یک قضیه‌ی اساسی است. ولی اگر با ابزار نظریه مدلی ثابت کنیم که مجموعه‌های شبه‌تحلیلی، مجموعه‌هایی هستند که در یک ساختار خاص تعریف‌پذیر هستند، در این صورت واضح است که مکمل یک مجموعه‌ی زیرتحلیلی، زیرتحلیلی است. زیرا مکمل یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر با فرمول φ، با فرمول $\neg\varphi$ تعریف می‌شود.
ایده‌ی اثبات: مطالعه‌ی نظریه‌ی مدلی ساختار $\mathbb{R}_{\text{an}} = (\mathbb{R}, \{f|$ جرم یک تابع تحلیلی است.$f\})$. دقت کنید که توابع جمع و ضرب، توابع تحلیلی هستند، همینطور ۰ و ۱ توابع ثابت هستند. در این صورت مجموعه‌های تعریف پذیر در این ساختار، دقیقاً مجموعه‌های شبه‌تحیلی هستند. اما مجموعه‌های زیرتحلیلی، مجموعه‌هایی هستند که با سور وجودی در این ساختار تعریف می‌شوند. بنابراین باید ثابت کنیم که اگر یک مجموعه با سور وجودی تعریف شود، مکمل آن نیز با سور وجودی تعریف می‌شود (در حالی که نقیض یک فرمول وجودی، یک فرمول عمومی است!).

---

[۷] subanalytic

۲ جلسه‌ی دوم: تئوری‌های مدل‌کامل

تعریف ۹. فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. فرمول‌ها را براساس پیچیدگی و با استقرا به صورت زیر رده‌بندی می‌کنیم.

- فرمول‌های بدون سور که فرمول‌های پایه‌ای هستند و در دسته‌ی صفرم (اول) قرار می‌گیرند و رده‌ی آنها را با $\exists_{۰} = \forall_{۰}$ نشان می‌دهیم. به عبارتی دیگر $\exists_{۰} = \forall_{۰} = \{\varphi|$ یک Lـ فرمول بدون سور است $\varphi\}$

- رده‌ی $\exists_{n+۱}$ که برابر است با مجموعه‌ی همه‌ی فرمول‌های به صورت $\exists\varphi$، که در آن φ یک فرمول در رده‌ی $\forall_n$ است.

- به صورت مشابه، تعریف می‌کنیم $\forall_{n+۱} = \{\forall\varphi|\varphi \in \exists_n\}$.

به بیانی دیگر، فرمول‌ها را براساس تعداد تغییرات نوع سور (از وجودی به عمومی یا بالعکس) رده‌بندی می‌کنیم.

مثال ۱۰. به عنوان مثال فرمول $\exists y_{۳}\forall y_{۲}\exists y_{۱}\varphi(\bar{x},\bar{y})$، اگر φ یک فرمول بدون سور باشد، یک فرمول متعلق به رده‌ی $\exists_{۳}$ است. دقت کنید که مثلاً سور وجودی $\exists y_{۳}$ می‌تواند چندین سور وجودی با هم باشد.

اگر $\mathfrak{A}$ یک Lـ ساختار باشد، تعریف می‌کنیم $L(\mathfrak{A}) = L \cup \{c_a\}_{a\in A}$. یعنی به ازای هر عنصر در دامنه‌ی $\mathfrak{A}$ یک ثابت به زبان می‌افزاییم.

تعریف ۱۱. فرض کنید $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ دو Lـ ساختار باشند، می‌نویسیم $\mathfrak{A} \overset{e}{\to}_{۰} \mathfrak{B}$ هرگاه برای هر Lـ فرمول بدون سور $\varphi(\bar{x})$ و هر چندتایی $\bar{a} \in A$ داشته باشیم

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(e(\bar{a})).$$

در حالت کلی می‌نویسیم $\mathfrak{A} \overset{e}{\to}_n \mathfrak{B}$ هرگاه برای هر Lـ فرمول $\varphi(\bar{x})$ و هر $\bar{a} \in A$ داشته باشیم

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(e(\bar{a})).$$

(معادلاً برای هر فرمول $\varphi(\bar{x}) \in \forall_n$ و هر $\bar{a} \in A$ داریم $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(e(\bar{a}))$. زیرا هر فرمول در یک ساختار یا خودش درست است یا نقیضش و نقیض یک فرمول وجودی، یک فرمول عمومی است).

تعریف ۱۲. می‌نویسیم $\mathfrak{A} \overset{e}{\to}_{\infty} \mathfrak{B}$ هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\mathfrak{A} \overset{e}{\to}_n \mathfrak{B}$. در این صورت می‌گوییم که e یک نگاشت هم‌ارزی مقدماتی است.

مشاهده ۱۳. *فرض کنید $\mathfrak{A} \overset{e}{\to}_n \mathfrak{B}$ و $\varphi(\bar{x}) \in \exists_{n+۱}$ و $\bar{a} \in A$. در این صورت اگر $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ آنگاه $\mathfrak{B} \models \varphi(e(\bar{a}))$. دقت کنید که عکس این مطلب برقرار نیست.*

اثبات. از آنجایی که $\varphi(\bar{a})$ به صورت $\exists\bar{y}\psi(\bar{a},\bar{y})$ است که در آن $\psi \in \forall_n$، در این صورت اگر $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ آنگاه عنصر $\bar{b} \in A$ موجود است به‌طوری که $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a},\bar{b})$. حال از آنجایی که $\psi \in \forall_n$ و طبق فرض (دو ساختار در حد فرمول‌های با n سور معادل‌اند) داریم $\mathfrak{B} \models \psi(e(\bar{a}),e(\bar{b}))$. پس $\mathfrak{B} \models \exists\bar{y}\psi(e(\bar{a}),\bar{y})$. □

تعریف ۱۴. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک Lـ ساختار باشد. قرار می‌دهیم مجموعه‌ی $\mathrm{Diag}_n(\mathfrak{A})$ را برابر با مجموعه‌ی همه‌ی $L(\mathfrak{A})$ـ فرمول‌های $\varphi \in \forall_n$ به طوری که $\mathfrak{A} \models \varphi$. به عبارتی دیگر

$$\mathrm{Diag}_n(\mathfrak{A}) = \{\varphi(\bar{a}) | \varphi \in \forall_n,\ \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})\}.$$

مشاهده ۱۵. *اگر $\mathfrak{B}$ یک Lـ ساختار باشد و $\mathfrak{B} \models \mathrm{Diag}_n(\mathrm{A})$ آنگاه واضح است که برای هر $\forall_n$ـ فرمول $\varphi(\bar{x})$ و هر $\bar{a} \in A$ داریم*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \implies \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}).$$

توجه: *اگر $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\bar{a})$ آنگاه $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(\bar{a})$. (به این معنی که حکم بالا دوطرفه است.) زیرا $\neg\varphi(\bar{a}) \in \exists_n$. یعنی به صورت $\exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y})$ که $\psi \in \forall_{n-1}$. حال اگر $\mathfrak{A} \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y})$، در این صورت $\bar{b} \in A$ موجود است که $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, \bar{b})$ حال (بنا به فرض استقرا) $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{a}, \bar{b})$. به این معنی که $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(\bar{a})$.*

مشاهده ۱۶. *اگر $\mathfrak{B} \models \mathrm{Diag}_n(\mathfrak{A})$ آنگاه نگاشت $e : \mathfrak{A} \to_n \mathfrak{B}$ موجود است که $e : A \to B$ و $e(a) = c_a^{\mathfrak{B}}$. به بیانی دیگر $\mathfrak{B}$ شامل $\mathfrak{A}$ است و این نگاشت نشاندن همه‌ی فرمول‌های $\forall_n$ را حفظ می‌کند.*
برعکس، اگر $e : \mathfrak{A} \to_n \mathfrak{B}$ آنگاه $\langle \mathfrak{B}, e(a) \rangle_{a \in A} \models \mathrm{Diag}_n(\mathfrak{A})$.

تعریف ۱۷. فرض کنید که T یک تئوری مرتبه‌ی اول باشد (مجموعه‌ای از جملات مرتبه‌ی اول در زبانی مشخص). تئوری T را کامل می‌نامیم هرگاه برای هر جمله‌ی مرتبه‌ی اول φ داشته باشیم که $T \models \varphi$ یا $T \models \neg\varphi$.

در نظریه‌ی مدل خیلی از اوقات مطلوب نوشتن یک تئوری کامل برای یک ساختار مشخص است.

تعریف ۱۸. فرض کنید که T یک تئوری باشد. می‌گوییم T مدل‌کامل[۸] است هرگاه برای هر $\mathfrak{A} \models T$ تئوری $\mathrm{Diag}_{\circ}(\mathfrak{A}) \cup T$ یک تئوری کامل در زبان $L(\mathfrak{A})$ باشد. یعنی برای هر دو مدل $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \models \mathrm{Diag}_{\circ}(\mathfrak{A}) \cup T$ و برای هر $L(\mathfrak{A})$ـ فرمول $\varphi(\bar{x})$ داشته باشیم $\mathfrak{m} \models \varphi(\bar{a})$ آنگاه $\mathfrak{n} \models \varphi(\bar{a})$ برای هر $\bar{a} \in A$. (دقت کنید که اینجا خود $\mathfrak{A}$ یک مدل برای تئوری T است.) به بیانی دیگر $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{n}$ در زبان $L(\mathfrak{A})$ معدل مقدماتی‌اند.

قضیه ۱۹. *موارد زیر با هم معادل‌اند:*

۱. *تئوری T مدل‌کامل است.*

۲. *اگر $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ و $\mathfrak{A}$ زیرساختار $\mathfrak{B}$ باشد، $e : \mathfrak{A} \to_{\circ} \mathfrak{B}$، آنگاه $e : \mathfrak{A} \to_{1} \mathfrak{B}$. (به بیانی دیگر اگر $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ و $\mathfrak{B}$ آنگاه برای هر فرمول در $\exists_{\circ}$ به صورت $\exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ و هر $\bar{a} \in A$، $\mathcal{B} \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \iff \mathfrak{A} \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{a})$. بعبارتی دیگر هر زیرساختاری بسته‌ی وجودی است.)*

۳. *اگر $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ و $\mathfrak{A}$ زیرساختار $\mathfrak{B}$ باشد، $e : \mathfrak{A} \to_{\circ} \mathfrak{B}$، آنگاه $e : \mathfrak{A} \to_{\infty} \mathfrak{B}$. (به بیانی دیگر اگر $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ و $\mathfrak{B}$ آنگاه $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. یعنی هر فرمول با پارامتر در A اگر در $\mathfrak{B}$ درست باشد، آنگاه در $\mathfrak{A}$ نیز درست است.)*

---
[۸] model-complete

۴. *برای هر فرمول $\varphi(\bar{x})$ یک فرمول $\psi(\bar{x}) \in \exists_۱$ موجود است به طوری که $T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. در واقع این عبارت بیان می‌کند که از دید یک تئوری مدل‌کامل پیچیدگی فرمول‌ها در حد یک سور وجودی است یعنی به رده‌ی $\exists_۱$ تعلق دارند.*

اثبات. ۱ $\leftarrow$ ۲) فرض کنید $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ و $e : \mathfrak{A} \to_۰ \mathfrak{B}$. همچنین فرض کنید $\mathfrak{B} \models \exists \bar{y} \varphi(\bar{a}, \bar{y})$ که $\bar{a} \in A$. از طرفی چون $\mathfrak{B} \models T \cup \mathrm{Diag}_۰(\mathfrak{A})$ و همچنین $\mathfrak{A} \models T \cup \mathrm{Diag}_۰(\mathfrak{A})$، پس $\mathfrak{A} \models \exists \bar{y} \varphi(\bar{a}, \bar{y})$.

۲ $\leftarrow$ ۳) فرض کنید مورد ۲ برقرار باشد، همچنین $e : \mathfrak{A} \to_۰ \mathfrak{B}$. با استقرا نشان می‌دهیم که از $e : \mathfrak{A} \to_۰ \mathfrak{B}$، برای هر n طبیعی، $e : \mathfrak{A} \to_n \mathfrak{B}$ نتیجه می‌شود. بنابه مورد ۲ پایه‌ی استقرا برقرار است. فرض کنید حکم برای n برقرار باشد. حال بنابر مشاهده ۱۳ می‌دانیم اگر $\varphi(\bar{x}) \in \exists_{n+۱}$، آنگاه اگر $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ در این صورت $\mathfrak{B} \models \varphi(e(\bar{a}))$. حال باید نشان دهیم که عکس این مطلب نیز درست است. یعنی اگر فرمول $\varphi(\bar{x})$ در $\mathfrak{B}$ درست باشد، آنگاه در $\mathfrak{A}$ نیز درست است. برای این منظور Lــ ساختار $\mathfrak{C}$ را طوری می‌یابیم که دیاگرام زیر برقرار باشد.

$$\mathfrak{A} \to_۰ \mathfrak{B} \to_۰ \mathfrak{C}$$

دقت کنید که با توجه به فرض استقرا داریم

$$\mathfrak{A} \to_n \mathfrak{B} \to_n \mathfrak{C}.$$

همچنین این دیاگرام را طوری می‌سازیم که

$$\mathfrak{A} \to_{n+۱} \mathfrak{C}.$$

در این صورت اگر $\mathcal{B} \models \varphi(\bar{a})$ حال چون $\mathcal{B} \to_۰ \mathfrak{C}$، پس $\mathcal{C} \models \varphi(\bar{a})$. حال چون $\mathcal{A} \to_{n+۱} \mathcal{C}$ و $\varphi \in \exists_{n+۱}$، پس $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a})$. پس حکم ثابت می‌شود. بنابراین اگر چنین $\mathfrak{C}$ای پیدا کنیم، حکم ثابت می‌شود. برای پیدا کردن چنین $\mathfrak{C}$ای کافی است نشان دهیم که $T' = \mathrm{Diag}_۰(\mathfrak{B}) \cup \mathrm{Diag}_{n+۱}(\mathfrak{A}) \cup T$ دارای مدل است. فرض کنید تئوری T' متناقض باشد، یعنی $T \cup \cup \mathrm{Diag}_{n+۱}(\mathfrak{A}) \models \neg\varphi(\bar{a}, \bar{b})$ برای یک $\varphi(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathrm{Diag}_۰(\mathfrak{B})$. دقت کنید که این عبارت در زبان $L(\mathfrak{B})$ اتفاق می‌افتد.

توجه ۲۰. فرض کنید $T \models \varphi(\bar{c})$ در زبان $L(\bar{c})$ برقرار باشد، در این صورت در زبان L همواره داریم $T \models \forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$.

حال با توجه به این نکته، در زبان $L(\mathfrak{A})$ داریم $T \cup \mathrm{Diag}_{n+۱}(\mathfrak{A}) \models \forall \bar{x} \neg\varphi(\bar{a}, \bar{x})$. از طرفی چون $\mathfrak{A} \models T \cup \mathrm{Diag}_{n+۱}(\mathfrak{A})$، پس $\mathfrak{A} \models \forall \bar{x} \neg\varphi(\bar{a}, \bar{x})$. از طرفی دیگر $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$. به این معنی که $\mathfrak{B} \models \exists \bar{y}\ \varphi(\bar{a}, \bar{y})$. حال چون $\mathfrak{B} \to_۰ \mathfrak{A}$، از فرض استقرا نتیجه می‌شود $\mathfrak{A} \to_۱ \mathfrak{B}$. حال چون $\exists \bar{y}\ \varphi(\bar{a}, \bar{y}) \in \exists_۱$، پس $\mathfrak{A} \models \exists \bar{y}\ \varphi(\bar{a}, \bar{y})$. که این تناقض است.

۳ $\leftarrow$ ۴) فرض کنید $\varphi(\bar{x})$ یک Lــ فرمول دلخواه باشد. قرار دهید $S\{\psi(\bar{x}) | \psi(\bar{x}) \in \exists_۱,\ T \models \psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})\}$.

ادعا: تئوری $T^* = T \cup \{\neg\psi(\bar{x}) | \psi \in S\} \cup \{\varphi(\bar{x})\}$ تناقض‌آمیز است. در صورتی که این ادعا درست باشد، داریم $T \cup \{\varphi(\bar{x})\} \models \psi_۱(\bar{x}) \vee \cdots \vee \psi_n(\bar{x})$، برای برخی فرمول‌های $\psi_n(\bar{x}), \ldots, \psi_۱(\bar{x})$ در مجموعه‌ی S. بنابراین $T \models \varphi(\bar{x}) \to \psi_۱(\bar{x}) \vee \cdots \vee \psi_n(\bar{x})$، حال چون تمام این ψ_iها در S هستند، پس $T \models \psi_i(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})$. که این حکم را ثابت

می‌کند، یعنی فرمول $\psi_1(\bar{x}) \vee \cdots \vee \psi_n(\bar{x})$ معادل وجوی فرمول $\varphi(\bar{x})$ است.

اثبات ادعا: فرض کنید $(\mathfrak{m}, \bar{a}) \models T^*$. یعنی $\mathfrak{m} \models T$ و اگر $T \models \psi(\bar{x}) \rightarrow \varphi(\bar{x})$ آنگاه $\mathfrak{m} \models \psi(\bar{a})$ و همچنین $\mathfrak{m} \models \varphi(\bar{a})$.

حال اگر $\mathfrak{n} \models T$ و همچنین داشته باشیم $\mathfrak{n} \models \mathrm{Diag}_\circ(\mathfrak{m})$، یعنی $\mathfrak{n} \rightarrow_\circ \mathfrak{m}$. آنگاه طبق فرض (مورد ۳)، $\mathfrak{n} \rightarrow_\infty \mathfrak{m}$.

در این صورت $\mathfrak{n} \models \varphi(\bar{a})$، چون φ یک فرمول دلخواه بود.

بنابراین $\mathrm{Diag}_\circ(\mathfrak{m}) \cup T \models \varphi(\bar{a})$. یعنی $T^{**} = \mathrm{Diag}_\circ(\mathfrak{m}) \cup T \cup \{\neg\varphi(\bar{a})\}$ ناسازگار است.

ادعا: تئوری T^{**} سازگار است.

بنابراین اگر این ادعا درست باشد، به تناقض رسیدیم و حکم ثابت می‌شود.

اثبات ادعا: فرض کنید تئوری T^{**} ناسازگار باشد، در این صورت داریم $T \cup \mathrm{Diag}_\circ(\mathfrak{m}) \models \varphi(\bar{a})$. در این صورت بنا به فشردگی، نتیجه می‌گیریم که $T \cup \theta(\bar{a}, \bar{b}) \models \varphi(\bar{a})$ برای یک فرمول $\theta(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathrm{Diag}_\circ(\mathfrak{m})$.

توجه ۲۱. اگر در زبان $L(\bar{c})$ داشته باشیم $T \cup \theta(\bar{c}) \models \varphi$، در این صورت در زبان L داریم $T \cup \{\exists \bar{y} \theta(\bar{y})\} \models \varphi$.

حال بنابه این نکته، داریم $T \cup \{\exists \bar{y} \theta(\bar{a}, \bar{y})\} \models \varphi(\bar{a})$. بنابراین در زبان $L(\bar{a})$ داریم $T \models \exists \bar{y} \theta(\bar{a}, \bar{y}) \rightarrow \varphi(\bar{a})$. پس در زبان L داریم $T \models \forall \bar{x}(\exists \bar{y} \theta(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \varphi(\bar{x}))$. بنابراین فرمول $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ در مجموعه‌ی S قرار دارد. بنابراین $\mathfrak{m} \models \neg(\exists \bar{y}\, \theta(\bar{a}, \bar{y}))$. که این تناقض است زیرا $\theta(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathrm{Diag}_\circ(\mathfrak{m})$.

۴ $\leftarrow$ ۱) تمرین. $\square$

۳ جلسه‌ی سوم: حذف سور و تئوری میدان مرتب اعداد حقیقی

۱.۳ حذف سور

تعریف ۲۲. تئوری T را زیرساختار کامل[۹] گوییم هرگاه برای هر $\mathfrak{m} \models T$ و هر زیرساختار $\mathfrak{A}$ از $\mathfrak{m}$، تئوری $\mathrm{Diag}_\circ(\mathfrak{A}) \cup T$ کامل باشد.

دقت کنید که زیرساختار کامل بودن در واقع یک ویژگی جبری تئوری‌هاست. ولی هنر نظریه‌ی مدل این است که یک ویژگی جبری را به یک ویژگی منطقی گره بزند.

قضیه ۲۳. *موارد زیر با هم معادل‌اند:*

۱. *تئوری T زیرساختار کامل است.*

۲. *برای هر فرمول $\varphi(\bar{x})$، یک فرمول $\psi(\bar{x}) \in \exists_\circ$ (بدون سور) پیدا می‌شود به طوری که*

$$T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

(تئوری T سورها را حذف می‌کند.)

حذف سور یک ویژگی خیلی جذاب برای تئوری‌ها است. به عنوان یک مثال برای حذف سور در میدان اعداد حقیقی می‌دانیم که وجود جواب یک معادله‌ی درجه‌دو (یک فرمول با سور وجودی)، معادل با مثبت بودن دلتای آن معادله‌ی درجه دو (فرمول بدون سور) است. این قضیه بیان می‌کند که اگر تئوری این چنین ویژگی‌ای داشته باشد، برای هر فرمول یک معادل بدون سور وجود دارد. بنابراین پیچیدگی محاسبات خیلی کمتر می‌شود. یعنی به جای اینکه دنبال یک جواب برای معادله بگردیم، درست بودن فرمول بدون سور را بررسی می‌کنیم.

اثبات. ۱ $\leftarrow$ ۲) فرض کنید $\varphi(\bar{x})$ یک فرمول دلخواه باشد. ما به دنبال یافتن یک فرمول بدون سور معادل برای این فرمول هستیم. قرار دهید $S = \{\psi(\bar{x}) | \psi(\bar{x}) \in \exists_\circ,\ T \models \forall \bar{x} \psi(\bar{x}) \rightarrow \varphi(\bar{x})\}$.
ادعا: تئوری $T^* = T \cup \{\neg\psi(\bar{x}) | \psi \in S\} \cup \{\varphi(\bar{x})\}$ ناسازگار است.
دقت کنید که اگر این ادعا را ثابت کنیم آنگاه تناقض از قسمتی متناهی از تئوری T^* تنیجه می‌شود. پس فرمول‌های $\psi_1, \dots, \psi_n$ در مجموعه‌ی S موجودند به‌طوری که تئوری

$$T \cup \{\neg\psi_1(\bar{x}), \cdots, \neg\psi_n(\bar{x})\} \cup \{\varphi(\bar{x})\}$$

ناسازگار است. بنابراین

$$T \cup \varphi \models \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n.$$

[۹] substructure complete

به این معنی که $T \models \varphi \to (\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n)$. از طرفی دیگر هر کدام از فرمول‌های ψ_i در مجموعه‌ی S قرار دارند، بنابراین $T \models \psi_i \to \varphi$، پس $T \models \varphi \leftrightarrow \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$. که این حکم را ثابت می‌کند.

اثبات ادعا: فرض کنید تئوری T^* سازگار باشد. به این معنی که ساختار $\mathfrak{m}$ و عنصر $\bar{a} \in m$ موجود باشد به طوری که $(\mathfrak{m}, \bar{a}) \models T \cup \{\neg\psi(\bar{a}) | \psi \in S\} \cup \{\varphi(\bar{a})\}$.

توجه کنید که اگر ψ یک فرمول بدون سور باشد به طوری که $T \models \psi \to \varphi$، آنگاه $\mathfrak{m} \models \neg\psi(\bar{a})$.

حال زیرساختار تولید شده توسط $\bar{a}$ را در $\mathfrak{m}$ در نظر بگیرید. در این صورت اگر $\langle\bar{a}\rangle \subseteq \mathfrak{n} \models T$، آنگاه $\mathfrak{n} \models \varphi(\bar{a})$. بنابراین $\mathrm{Diag}_0(\langle\bar{a}\rangle) \cup T \cup \{\neg\varphi(\bar{a})\}$ ناسازگار است. بنابراین فرمول $\chi(\bar{a}) \in \mathrm{Diag}_0(\langle\bar{a}\rangle)$ موجود است به طوری که در زبان $L(\bar{a})$ داریم $T \models \chi(\bar{a}) \to \varphi(\bar{a})$. بنابراین در زبان L داریم $T \models \forall\bar{x}\ (\chi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}))$. که از این نتیجه می‌شود $\chi(\bar{x}) \in S$. بنابراین $\mathfrak{m} \models \neg\chi(\bar{a})$. از طرفی $\mathfrak{m} \models \chi(\bar{a})$. که این تناقض است و حکم ثابت می‌شود. □

یادآوری ۲۴. تئوری T سورها را حذف می‌کند هرگاه برای هر فرمول $\varphi(\bar{x})$ یک فرمول بدون سور $\psi(\bar{x})$ پیدا شود به طوری که $T \models \forall\bar{x}\ \ (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

۱.۱.۳ محکی برای حذف سور:

اگر شرایط زیر برقرار باشد تئوری T سورها را حذف می‌کند.

برای هر مدل $\mathfrak{m} \models T$ و هر مدل به اندازه‌ی کافی اشباع (در ادامه‌ی این درس با این مفهوم بیشتر آشنا خواهید شد) $\mathfrak{n} \models T$ و هر زیرساختار مشترک $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$ و هر نگاشت $e : \mathfrak{A} \to_0 \mathfrak{n}$، و همچنین برای هر عنصر $a \in M - A$، یک ساختار $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{m}$ و یک نگاشت $e' : \mathfrak{A}' \to_0 \mathfrak{n}$ موجود باشد که e را توسیع بدهد.

توجه ۲۵. این محک زیرساختار کامل بودن را نتیجه می‌دهد. بنابراین معادل با حذف سور داشتن یک تئوری است.

اثبات. فرض کنید این محک برقرار باشد. حال فرض کنید $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \models T$ و نیز $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$. همچنین فرض کنید برای یک $\bar{c} \in A$، $\mathfrak{m} \models \varphi(\bar{c})$. باید نشان بدهیم $\mathfrak{n} \models \varphi(\bar{c}^{\mathfrak{n}})$. حال چون $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{n}$، پس یک نگاشت $e : \mathfrak{A} \to_0 \mathfrak{n}$ وجود دارد. بنابراین کافی است این عنصر $\bar{c}$ را به دامنه‌ی این نگاشت بیافزاییم، که با توجه به این محک این کار را می‌توان کرد. در این صورت $\bar{c}^{\mathfrak{n}}$ برابر با تصویر $\bar{c}$ تحت این نگاشت است. □

۲.۳ اثبات حذف سور برای $\bar{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$:

قرار دهید $T = \mathrm{Th}(\bar{\mathbb{R}}) = \{\varphi |$ جمله‌ی مرتبه‌ی اول است. $\varphi,\ \mathbb{R} \models \varphi\}$. هدف ما اثبات حذف سور برای این ساختار است. دقت کنید که میدان اعداد حقیقی از لحاظ جبری بسته نیست (معادله‌ی $x^2 + 1 = 0$ در میدان اعداد حقیقی دارای جواب نیست). ولی فقط با اضافه کردن ریشه‌ی همین معادله به میدان اعداد حقیقی، به یک میدان بسته‌ی جبری می‌رسیم. به این چنین میدانی، میدان بسته‌ی حقیقی می‌گویند. به بیانی دیگر، میدان بسته‌ی حقیقی میدانی است که اولاً می‌توان روی آن یک ترتیب تعریف کرد به طوری که مجذور هر عددی مثبت باشد. ثانیاً هیچ بستار جبری سره‌ای بین خودش و بستار جبری‌اش

وجود ندارد. ولی نکته‌ای که اینجا وجود دارد این است که این ویژگی، مرتبه‌ی اول نیست.

ویژگی مقدار میانی برای چندجمله‌ای‌ها:

اگر $p(x) \in \mathbb{R}[X]$ یک چندجمله‌ای باشد و همچنین داشته باشیم $p(a)p(b) < 0$ آنگاه عنصر $t \in (a,b)$ یافت می‌شود به طوری که $p(t) = 0$.

دقت کنید که این ویژگی در تئوری T نهفته است، زیرا این ویژگی را می‌توان در منطق مرتبه‌ی اول برای هر چندجمله‌ای به صورت زیر بیان کرد.

$$\forall a_0, \ldots, a_n \, \forall c_1, c_2 \; (a_0 + a_1 c_1 + \cdots + a_n c_1^n < 0 \wedge a_0 + a_1 c_2 + \cdots + a_n c_2^n > 0$$
$$\rightarrow \exists x \; c_1 < x < c_2 \wedge \; a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0)$$

در ادامه به اثبات این قضیه خواهیم پرداخت.

قضیه ۲۶. *تئوری T سورها را حذف می‌کند.*

تعریف ۲۷. فرض کنید $k_0 \subseteq k_1$ دو میدان باشند. می‌گوییم k_0 در k_1 nـ بسته است هرگاه برای هر چندجمله‌ای $p(x) \in k_0[X]$ که درجه‌ی آن حداکثر n است، اگر $\alpha \in k_1$ ریشه‌ی این چندجمله‌ای باشد، آنگاه $\alpha \in k_0$. به بیان دیگر این میدان در حد چندجمله‌ای‌های از درجه‌ی حداکثر n بسته است.

قضیه ۲۸. *فرض کنید $K_0, K_1 \models T$ و k میدانی است که زیرساختار K_0 است. همچنین یک نگاشت $e : k \rightarrow K_1$ موجود باشد. (به بیانی دیگر k زیرساختار مشترک K_0, K_1 است.) همچنین فرض کنید که k در K_0 nـ بسته است و تصویر آن در K_1 تحت نگاشت e هم nـ بسته است. فرض کنید $\alpha \in K_0$ عنصری از درجه‌ی حداکثر $n+1$ روی k باشد (ریشه‌ی یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر $n+1$ با ضرایب در k). دقت کنید که چون k در K_1 nـ بسته است، اگر درجه‌ی چندجمله‌ای n باشد، آنگاه $\alpha \in k$. در این صورت نگاشت $e_1 : k[\alpha] \rightarrow K_1$ که توسیعی از نگاشت e است، وجود دارد. که $k[\alpha]$ میدان تولید شده توسط k و α است.*

اثبات. فرض کنید چندجمله‌ای تکین $q(x) \in k[X]$ از درجه‌ی حداکثر $n+1$ باشد و α ریشه‌ی این چندجمله‌ای باشد. ما به دنبال یافتن عنصر $\beta \in K_1$ هستیم که ریشه‌ی تصویر این چندجمله‌ای در K_1 باشد. اگر K_1 بسته‌ی جبری بود، وجود چنین عنصری بدیهی بود. فرض کنید $a, b \in k$ و $a < b$ به گونه‌ای باشند که $K_0 \models \alpha \in (a,b)$ (دقت کنید که $\alpha \notin k$).

تمرین: چنین بازه‌ای وجود دارد.

دقت کنید که درجه‌ی چندجمله‌ای $q'(x)$، مشتق $q(x)$، حداکثر n است. بنابراین اگر چندجمله‌ای $q'(x)$ در میدان K_0 ریشه داشته باشد، این ریشه‌ها در میدان k هستند. بنابراین بازه‌ی (a,b) را می‌توان به گونه‌ای درنظر گرفت که چندجمله‌ای $q(x)$ در این بازه یکنوا باشد. یعنی تنها ریشه‌ی این چندجمله‌ای در میدان K_0 عنصر α باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مساله، فرض کنید این چندجمله‌ای در این بازه صعودی باشد. بنابراین چون $K_0 \models q(\alpha) = 0$، $q(a)q(b) < 0$.

ادعا: چندجمله‌ای $q(x)$ در میدان K_1 دارای ریشه‌ای مانند β است به طوری که $K_1 \models a < \beta < b$.

اثبات ادعا: چون ویژگی مقدار میانی در تئوری T قرار دارد و $K_۱ \models T$، پس چنین ریشه‌ای وجود دارد.
دقت کنید که $q(x)$ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر α و β است. بنابراین $k[\alpha] \cong k[\beta]$. حال نشان می‌دهیم که

$$(k[\alpha], <) \cong (k[\beta], <)$$

و این اثبات را تمام می‌کند.
ادعا: برای هر چندجمله‌ای $p(x) \in k[X]$ داریم

$$K_۰ \models p(\alpha) > ۰ \iff K_۱ \models p(\beta) > ۰.$$

اثبات ادعا: بدون کاستن از کلیت مساله، می‌توان فرض کرد درجه‌ی $p(x)$ حداکثر n است. زیرا با توجه به الگوریتم تقسیم داریم $p(\alpha) = q(\alpha)s(\alpha) + r(\alpha)$ که در آن درجه‌ی r حداکثر n است. بنابراین کافی است نشان دهیم که اگر $K_۰ \models r(\alpha) > ۰$ آنگاه $K_۱ \models r(\beta) > ۰$. بازه‌ی $(a', b') \subseteq (a, b)$ را می‌توان طوری یافت به طوری که $r(\alpha)$ در کل این بازه مثبت باشد. به این معنی که $K_۰ \models \forall x \in (a', b')\ r(x) > ۰$. حال چون $r(a')$ و $r(b')$ هر دو در k قرار دارند، هم‌علامت هستند. بنابراین علامت آنها در $K_۰$ و $K_۱$ یکسان است. از طرفی دیگر، اگر در میدان $K_۱$ چندجمله‌ای $r(x)$ ریشه‌ی دیگری داشته باشد، آن ریشه در میدان k قرار می‌گیرد. بنابراین می‌توانیم بازه را طوری انتخاب کنیم که همواره داشته باشیم $K_۱ \models \forall x \in (a', b')\ r(x) > ۰$. پس کافی است که نشان دهیم $\beta \in (a', b')$. که این اثبات را تمام می‌کند.
با توجه به اینکه چندجمله‌ای $q(x)$ در میدان $K_۱$ در این بازه یک ریشه دارد، که β است. حال اگر β در این بازه باشد، که حکم ثابت می‌شود. در غیر این صورت چون که $q(a')q(b') < ۰$، پس در میدان $K_۱$، چندجمله‌ای $q(x)$ یک ریشه‌ی دیگری مثل $\beta' \in (a', b')$ دارد. بنابراین $q'(x)$ در بازه‌ی (a, b) دارار ریشه است و با توجه به nـ‌بسته بودن، این ریشه در میدان k قرار دارد، که این تناقض با یکنوا بودن $q(x)$ در بازه‌ی (a, b) دارد. پس $\beta \in (a', b')$. دقت کنید که تمام اثبات‌های گفته شده در منطق مرتبه‌ی اول هستند، پس در تئوری T قرار دارند.

□