۵ تمرینهای میانِ درس

در جلسه‌ی هشتم اثبات بسیاری جزئیات به شما واگذار شده بود که قرار شد در یک جلسه‌ی جبرانی آموختال بدانها بپردازیم. تحویل دادن پاسخ تمرینهای زیر اجباری نیست، ولی حضور در کلاس و مشارکت فعال در حل آنها الزامی است.

گزاره ۲۰: موارد زیر با هم معادلند:

۱. $\mathfrak{M}$ مدلی اول است.

۲. $\mathfrak{M}$ مدلی اتمیک و شماراست.

اثباتِ ۲ $\rightarrow$ ۱ را به دانشجو وامی‌گذاریم. برای اثباتِ ۱ $\rightarrow$ ۲ فرض کنید $M = (a_i)_{i\in\omega}$ مدلی اتمیک و شمارا باشد و $\mathfrak{N} \models T$ مدلی دلخواه. از آنجا که $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_0)$ ایزوله است، در هر مدلی و از جمله در $\mathfrak{N}$ برآورده می‌شود. از این رو عنصرِ $b_0 \in \mathfrak{N}$ چنان موجود است که $b_0 \equiv a_0$؛ که منظور از علامت یادشده، عبارت زیر است:

$$\langle \mathfrak{M}, a_0\rangle \equiv \langle \mathfrak{N}, b_0\rangle.$$

حال اگر $b_0, \dots, b_{n-1} \in N$ چنان یافت شده باشند که

$$b_0, \dots, b_{n-1} \equiv a_0, \dots, a_{n-1} \quad (*)$$

آنگاه، نشان می‌دهیم که عنصرِ $b_n \in N$ چنان موجود است که

$$a_0, \dots, a_n \equiv b_0, \dots, b_n.$$

فرض کنیم تایپِ $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_0, \dots, a_n)$ توسط فرمولِ $\phi(x_0, \dots, x_n)$ ایزوله شده باشد. از $\mathfrak{M} \models \phi(a_0, \dots, a_n)$ نتیجه می‌شود که

$$\mathfrak{M} \models \exists x \quad \phi(a_0, \dots, a_{n-1}, x).$$

بنا به $(*)$ داریم

$$\mathfrak{N} \models \exists x \quad \phi(b_0, \dots, b_{n-1}, x)$$

تمرین ۲۱: نشان دهید که اگر $\mathfrak{N} \models \phi(b_۰, \dots, b_n)$ آنگاه

$$\langle \mathfrak{N}, b_۰, \dots, b_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, a_۰, \dots, a_n \rangle$$

تمرین ۲۲: نشان دهید که نگاشت $f : M \to N$ که هر a_i را به b_i می‌برد، مقدماتی است.

دیدیم که طبق تعریف، هر مدل اول به طور مقدماتی در سایر مدلها می‌نشیند. بنابراین اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل اول باشند، هر یک به طور مقدماتی در دیگری می‌نشیند؛ ولی از این ایزومرف بودنِ $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ نتیجه نمی‌شود.

تمرین ۲۳: مثالی از دو ساختارِ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ بزنید که ایزومرف نیستند ولی به طور مقدماتی در یکدیگر می‌نشینند.

با این همه، در زبان شمارا، این مطلوب برقرار است.

تمرین ۲۴: نشان دهید که اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل اول برای T باشند، آنگاه $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$.

مثال ۲۵: در زبانِ $L = \{E\}$ تئوریِ T را به گونه‌ای در نظر بگیرید که بیانگر این باشد که E رابطه‌ای هم‌ارزی است با نامتناهی کلاس و هر کلاس از این رابطه نیز نامتناهی است.

تمرین ۲۶: نشان دهید تئوری یادشده کامل، دارای حذف سور، و $\aleph_۰$ـ جازم است (مورد آخر یعنی هر دو مدل شمارا از این تئوری با هم ایزومرفند).

حال زبانِ $L = \{E_۱, E_۲, \dots\}$ و تئوریِ T در آن را در نظر بگیرید که بگوید که هر E_i یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و همه‌ی کلاسهای آن نامتناهی است و به‌علاوه هر E_i توسط $E_{i+۱}$ تظریف می‌شود؛ یعنی $E_i \subseteq E_{i+۱}$.

تمرین ۲۷: نشان دهید T کامل و دارای حذف سور است ولی $\aleph_۰$ـ جازم نیست.

تمرین ۲۸: نشان دهید که تایپِ جزئیِ $\Sigma(x, y)$ متشکل از فرمولهای $\{E_i(x, y)\}_{i\in\omega}$ و فرمولِ $x \neq y$ غیرایزوله است.

تمرین ۲۹: نشان دهید تئوری یادشده دارای مدل اول است و در این مدل اول،

$$x = y \leftrightarrow \bigwedge_{i\in\omega} E_i(x, y).$$

دقت کنید که رابطه‌ی

$$E_\infty := \bigwedge E_i(x, y)$$

خود نیز یک رابطه‌ی هم‌ارزی است که بنا به تمرین بالا، تعبیر آن در مدل اول، تساوی است. (در مدلِ اشباع این تئوری، رابطه‌ی یادشده دارای نامتناهی کلاس است).