۴ نوبت چهارم

تمرین ۱۵:

۱. عنصرِ $t \in M$ را روی مجموعه‌ی $A \subseteq M$ جبری می‌خوانند هرگاه فرمولی چون $\phi(x, a)$ در زبانِ $L(A)$ موجود باشد، به طوری که مجموعه‌ی زیر متناهی باشد

$$\phi(M, a) = \{m \in M | M \models \phi(m, a)\}$$

و $t \in \phi(M, a)$. نیز تایپِ $p(x)$ را جبری می‌خوانند هرگاه تنها تعداد متناهی عنصر آن را برآورده کنند. نشان دهید که عنصرِ t روی A جبری است اگروتنهااگر $\mathrm{tp}(t/A)$ تایپی جبری باشد.

۲. نشان دهید که تایپِ $p(x) \in S(A)$ جبری است اگروتنهااگر برای هر مجموعه‌ی $A \subseteq B$ تنها تعداد متناهی تایپِ $q \in S(B)$ موجود باشند که $p \subseteq q$.

تمرین ۱۶: به طور مستقیم (و بدون بحث توپولوژیک) نشان دهید که اگر در یک تئوری، تعداد تایپها متناهی باشد، آنگاه همه‌ی آن تایپها ایزوله‌اند (یعنی هر یک، تنها از یک فرمول نتیجه می‌شود).

تمرین ۱۷: (در یک زبان شمارا) به طور مستقیم (و بدون بحث توپولوژیک) نشان دهید که اگر در یک تئوریِ T داشته باشیم $|S_n(T)| > \aleph_0$ آنگاه $|S_n(T)| \geq 2^{\aleph_0}$.

تمرین ۱۸: فرض کنید $T = \mathrm{Th}(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, <)$ که در آن $\mathbb{Q}$ محمولی برای اعداد گویاست. آیا این تئوری، مدل اول دارد؟

تمرین ۱۹: فرض کنید $L = \{p_s | s \in 2^{<\omega}\}$ که در آن $2^{<\omega}$ مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های متناهی ساخته‌شده با ۰ و ۱ است و هر p_s یک محمول. تئوریِ T، نوشته‌شده با اصول زیر بیان می‌کند که این محمولها جهان را به صورت دوجمله‌ای تجزیه می‌کنند:

- $\forall x \quad p_\emptyset(x)$.
- $\exists x \quad p_s(x)$.
- $\forall x \quad (p_{s0}(x) \vee p_{s1}(x) \leftrightarrow p_s(x))$.
- $\forall x \quad \neg(p_{s0}(x) \wedge p_{s1}(x))$.

نشان دهید که T کامل و دارای حذف سور است. نیز نشان دهید که در این تئوری، هیچ فرمولی هیچ تایپی را ایزوله نمی‌کند و این تئوری مدل اول ندارد.