۳ اصلبندی، فرافیلتر

اصلبندی به صورت $\forall\exists$

تمرین ۱۲ (ادامه‌ی تمرینِ ۸): فرض کنید تئوریِ T چنان باشد که برای هر زنجیرِ $(M_i)_{i\in I}$ از مدلهای آن، $\bigcup M_i$ نیز مدلی از T باشد. نشان دهید که در این صورت T دارای یک اصلبندی به صورتِ $\forall\exists$ است. [۳]

اگر راه‌حل خودتان به نتیجه نمی‌رسد، پاسخ زیر را تکمیل کنید: با $T^{\forall\exists}$ مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌هایی را نشان دهید که به شکل $\forall\exists$ هستند و از T نتیجه می‌شوند. هدف این است که نشان دهیم که

$$M \models T^{\forall\exists} \Leftrightarrow M \models T.$$

فرض کنید $M \models T^{\forall\exists}$. هدف ساختن زنجیری است به صورت زیر

$$M = M_۰ \subseteq N_۰ \subseteq M_۱ \subseteq N_۱ \subseteq \ldots,$$

که در آن

$$M_۰ \prec M_۱ \prec M_۲ \prec \ldots$$

و $N_i \models T$. در این صورت خواهیم داشت

$$M \prec \bigcup M_i = \bigcup N_i \models T$$

و نتیجه، حاصل می‌شود.

روش ساخت زنجیر:

۱. نشان دهید که مدلی چون $N \models T$ یافت می‌شود، به طوری که $N \models M^{\exists\forall}$. منظور از $M^{\exists\forall}$ مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های به شکل $\exists\forall$ است که در M درستند. نیز مشاهده کنید که $N \models M^{\exists\forall}$ معادل $M \models N^{\forall\exists}$ است.

۲. نشان دهید که $N' \equiv N$ چنان موجود است که $M \subseteq N'$، و هر جمله‌ی با سور عمومی با پارامتر در M در N' درست است. (برای این منظور، کافی است نشان دهید که $\mathrm{Diag}_{\forall}(M) \cup \mathrm{Th}(N)$ سازگار است.)

[۳] این تمرین در تمرینهای جلسه‌ی بعد ادامه دارد.

۳. نشان دهید که M' موجود است، به طوری که $M \subseteq N' \subseteq M'$ و $M \prec M'$.

$\square$

تمرین ۱۳: نشان دهید تئوریِ T را می‌توان تنها با استفاده از فرمولهای با سور جهانی اصلبندی کرد اگروتنهااگر تحت زیرمدلها بسته باشد؛ یعنی هرگاه $M \models T$ و $N \subseteq M$ آنگاه $N \models T$.

فیلترها

تمرین ۱۴: گیریم I یک مجموعه باشد و $P(I)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های آن. زیرمجموعه‌ی $D \subseteq P(I)$ را یک **فیلتر** روی I می‌خوانیم هرگاه شرایط زیر درباره‌ی آن صادق باشند:

۱. $I \in D$ و $\emptyset \notin D$.

۲. D تحت اشتراک متناهی بسته باشد، یعنی هرگاه $A, B \in D$ آنگاه $A \cap B \in D$.

۳. اگر $A \in D$ آنگاه $A_{\uparrow_I} \subseteq D$؛ یعنی اگر $A \in D$ و $A \subseteq B \subseteq I$ آنگاه $B \in D$.

(شهود تعریف این است که فیلتر قرار است گردایه‌ای از زیرمجموعه‌ی «بزرگ» از I باشد).

۱. گیریم $I = \mathbb{R}$. نشان دهید مجموعه‌ی زیر، فیلتری روی I است:

$$D = \{X \subseteq \mathbb{R} | \mu(\mathbb{R} - X) = ۰\}$$

که در بالا مراد از μ، اندازه‌ی لُبِگ است.

۲. فرض کنید κ کاردینالی باشد نامتناهی به طوری که $\kappa \leq |I|$؛ نشان دهید که مجموعه‌ی زیر فیلتری است روی I:

$$D = \{X \subseteq I : |I - X| \leq \kappa\}.$$

فیلترِ D در بالا را در حالتی که $\kappa = \aleph_۰$، **فیلترِ فِرشه** می‌خوانیم.

۳. برای هر $x \in I$ نشان دهید که مجموعه‌ی زیر فیلتری روی I است:

$$D = \{X \subseteq I | x \in X\}.$$

فیلترهای اینچنین را **فیلتر اصلی** می‌خوانیم.

۴. فرض کنید D فیلتری روی I باشد و $X \notin D$. نشان دهید مجموعه‌ی زیر فیلتری روی I است دربرگیرنده‌ی D و شاملِ $I - X$:

$$E = \{Y \subseteq I | \exists Z \in D \quad Z - X \subseteq Y\}.$$[۴]

[۴] این تمرین ادامه دارد.