۲ تایپها

تاریخ تحویل: شنبه ۹۵/۱۱/۳۰

توجه. از این پس، هرگاه که بیم ابهام نرود، از استفاده از نمادهایی چون $\mathfrak{M}$ خودداری می‌کنیم؛ یعنی نماد M هم نشانگرِ مدلها و ساختارها و هم نشانگر جهان زمینه‌ی آنها خواهد بود.

اصلبندیِ $\forall\exists$

تمرین ۸:

۱. تئوریِ T را دارای اصل‌بندی به صورت $\forall\exists$ می‌خوانیم هرگاه آن را بتوان با جمله‌هایی به فُرمِ $\forall v_1, \ldots v_n \exists w_1, \ldots w_m \phi(\bar{v}, \bar{w})$ اصلبندی کرد که در آنها ϕ فرمولی بدون سور است.

فرض کنید T دارای اصلبندیِ به صورت $\forall\exists$ باشد، $(I, <)$ ترتیبی باشد خطی، و $(M_i)_{i \in I}$ زنجیری باشد از مدلهای T. نشان دهید $\bigcup M_i$ مدلی از T است. [۲]

۲. گیریم $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_0$، $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_2$ و $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2$. نشان دهید که $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_1$.

حذف‌سور و تایپها

تمرین ۹:

۱. فرض کنید در تئوریِ T، فرمولِ $\phi(\bar{x})$ از همه‌ی نتیجه‌های بدون سورش نتیجه شود؛ یعنی گردایه‌ی Γ، تعریف‌شده در زیر، $\phi(\bar{x})$ را نتیجه دهد:

$$\Gamma = \{\psi(\bar{x}) | T \models \phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})\}.$$

نشان دهید که در این صورت، ϕ دارای معادلی بدون سور نسبت به T است؛ یعنی فرمولی بدون سور چون $\psi(\bar{x})$ موجود است، به طوری که

$$T \models \forall \bar{x} \quad (\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})) \, .$$

۲. نشان دهید که تئوریِ T دارای حذف سور است، یعنی هر فرمولی نسبت بدان دارای معادلی بدون سور است، اگروتنهااگر هر تایپِ کاملی نسبت به T، از بخش بدون سورِ خود نتیجه

[۲] جهت عکس را در تمرینهای جلسه‌ی بعد خواهیم دید.

شود. (به بیان دیگر، تئوریِ T سورها را حذف می‌کند، اگروتنهااگر برای هر a, b داشته باشیم

$$\text{qftp}(a) = \text{qftp}(b) \Leftrightarrow \text{tp}(a) = \text{tp}(b).)$$

سامانه‌های رفت‌وبرگشتی

تمرین ۱۰: گیریم $M_1, M_2 \models T$، $\bar{a} \in M_1$ و $\bar{b} \in M_2$. فرض کنید سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی از ایزومرفیسمهای میان زیرساختارهای M_1 و M_2 موجود باشد، شامل ایزومرفیسمی چون $f : \langle \bar{a} \rangle \to \langle \bar{b} \rangle$ که $f(\bar{a}) = \bar{b}$. منظور از $\langle \bar{a} \rangle$ زیرساختاری از M_1 است که توسط $\bar{a}$ تولید شده است. نشان دهید که در این صورت $\text{tp}^{M_1}(\bar{a}) = \text{tp}^{M_2}(\bar{b})$. (با تمرینِ ۱ مقایسه شود).

حذف سور و سامانه‌های رفت‌وبرگشتی. با کمک تمرینهای ۹ و ۱۰ می‌توان نشان داد که، تئوری T سورها را حذف می‌کند اگروتنهااگر برای هر دو مدلِ باندازه‌اشباعِ $M_1, M_2 \models T$ و چندتایی‌های $\bar{a} \in M_1, \bar{b} \in M_2$، اگر زیرساختار تولیدشده توسط $\bar{a}$ در M_1 با زیرساختار تولیدشده توسط $\bar{b}$ در M_2 ایزومرف باشد، آنگاه سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی از ایزومرفیسمهای میان زیرساختارهای M_1 و M_2 موجود باشد که این ایزومرفیسم را شامل است.

تمرین ۱۱: گیریم M یک L ـ ساختار باشد، $A \subseteq M$ و $\bar{a}, \bar{b} \in M$. نشان دهید که $\text{tp}^M(\bar{a}/A) = \text{tp}^M(\bar{b}/A)$ اگروتنهااگر توسیعِ مقدماتی N از M و اتومرفیسمی چون $f \in \text{Aut}(N/A)$ موجود باشند، به طوری که $f(\bar{a}) = \bar{b}$. منظور از $\text{Aut}(N/A)$ مجموعه‌ی همه‌ی اتومرفیسمهای N است که A را نقطه‌وار حافظند.

حکم قضیه‌ی بالا را در صورت آشنایی با مدل هیولا، می‌توان به گونه‌ی پیشِ رو بازنوشت: $\bar{a}$ و $\bar{b}$ همتایپند، اگروتنهااگر اتومرفیسمی در $\text{Aut}(\mathbb{M}/A)$ موجود باشد که $\bar{a}$ را به $\bar{b}$ ببرد. با $\mathbb{M}$، مدلِ هیولا را نشان داده‌ایم.