۱۰ نوبت دهم

فرض کنید $\mathfrak{M}$ مدلی باشد به اندازه‌ی موردنیازْ اشباع. برای یک دنباله‌ی $\mathcal{A} = (a_i)_{i\in I}$ تعریف کنید

$$EM(\mathcal{A}) = \{\phi(x_1, \ldots, x_n) | n \in \mathbb{N}, \forall i_1 < \ldots i_n \in I \quad \mathfrak{M} \models \phi(a_{i1}, \ldots, a_{in})\}.$$

تمرین ۵۰: نشان دهید $EM(\mathcal{A})$ (با متغیرهای $(x_i)_{i\in\omega}$) یک تایپ کامل است اگروتنهااگر $\mathcal{A}$ دنباله‌ای بازنشناختنی باشد.

به طور مشابه $EM(\mathcal{A}/C)$ را برای یک مجموعه‌ی پارامترِ C تعریف کنید.

تمرین ۵۱: نشان دهید که برای هر دنباله‌ی دلخواهِ $\mathcal{A}$ و هر مجموعه‌ی C از پارامترها، دنباله‌ای بازنشناختنی روی C چون $\mathcal{B} = (b_i)_{i\in\omega}$ چنان موجود است که $\mathcal{B} \models EM(\mathcal{A}/C)$

تمرین ۵۲: فرض کنید $\mathcal{A} = (a_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای بازنشناختنی باشد روی C و $C \subseteq D$ دلخواه باشد. نشان دهید دنباله‌ی $A' = (a'_i)_{i\in I}$ چنان موجود است که

$$\mathrm{tp}(\mathcal{A}'/C) = \mathrm{tp}(\mathcal{A}/C)$$

و $\mathcal{A}'$ روی D بازنشناختنی است (به بیان دیگر، یک کپی از $\mathcal{A}$ روی C موجود است که روی D بازنشناختنی است).

تمرین ۵۳ (همان تمرین بالا به بیان دیگری): فرض کنید $\mathcal{A} = (a_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای بازنشناختنی باشد روی C و $B \subseteq D$ دلخواه باشد. نشان دهید مجموعه‌ای چون

$$D' \equiv_C D$$

چنان موجود است که $\mathcal{A}$ روی آن بازنشناختنی است.

تمرین ۵۴ (باز هم همان تمرین به زبان دیگری): فرض کنید $\mathcal{A} = (a_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای بازنشناختنی باشد روی C. نشان دهید که مدلی چون $C \subseteq N$ چنان موجود است که دنباله‌ی $\mathcal{A}$ روی آن بازنشناختنی است.

تمرین ۵۵: گیریم $\mathcal{A} = (a_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای بازنشناختنی باشد. نشان دهید که در هر اندازه‌ی دلخواه، دنباله‌ای بازنشناختنی موجود است که تایپِ $EM(\mathcal{A})$ را برآورده کند.

تمرین ۵۶: آیا دنباله‌ی بازنشناختنیِ دلخواهِ $\mathcal{A}$ روی خودش بازنشناختنی است؟ نشان دهید که یک کپی از $\mathcal{A}$ موجود است که روی $\mathcal{A}$ بازنشناختنی است.

تمرین ۵۷: دو دنباله‌ی نامتناهیِ $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ چنان بسازید که $\mathcal{A}$ روی $\mathcal{B}$ بازنشناختنی باشد و $\mathcal{B}$ روی $\mathcal{A}$.

تمرین ۵۸: فرض کنید که $\mathcal{A} = (a_i)_{i\in\omega}$ و $\mathcal{B} = (b_i)_{i\in\omega}$ دو دنباله‌ی دلخواه باشند. نشان دهید که دنباله‌های $\mathcal{A}'$ و $\mathcal{B}'$ چنان موجودند که $\mathcal{A}'$ روی $\mathcal{B}'$ بازنشناختنی است و $\mathcal{B}'$ روی $\mathcal{A}'$ و داریم

$$\mathcal{A}' \models EM(\mathcal{A})$$
$$\mathcal{B}' \models EM(\mathcal{B}).$$

دنباله‌های اینچنین را متقابلاً‌بازنشناختنی می‌خوانیم.