تمرینهای درس «مباحثی در منطق»

نیمسال دوم تحصیلی ۹۶-۹۵، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مدرس: مسعود پورمهدیان

دستیار: محسن خانی

توجه: همواره پاسخ به دو تمرین اول برای کسب اجازه‌ی حضور در کلاس الزامی است. همواره تمرینهای ۱ تا ۴ در کلاس حل خواهند شد، و باقی برای دانشجویان علاقه‌مند نوشته شده‌اند و تنها در صورتی که وقت اجازه دهد یا مستمعان به دانستن راه‌حل آنها کنجکاو باشند بدانها پرداخته خواهد شد.

۱ مفاهیم اولیه‌ی نظریه‌ی مدلی

تاریخ تحویل: شنبه ۲۳ بهمن

سامانه‌های رفت‌وبرگشتی

تمرین ۱: دو ساختارِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ را **به‌طورجزئی‌ایزومُرف** می‌خوانیم، هرگاه یک مجموعه‌ی ناتهیِ Γ شامل برخی ایزومرفیسمهای میان برخی زیرساختارهای $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ موجود باشد، که ویژگی رفت‌وبرگشتی دارد؛ یعنی

- هرگاه $f \in \Gamma$ و $a \in A$، آنگاه توسیعی از تابعِ f در Γ موجود باشد که عنصر a در دامنه‌اش بیفتد.
- هرگاه $f \in \Gamma$ و $b \in B$، آنگاه توسیعی از تابعِ f در Γ موجود باشد که عنصرِ B در بُردش واقع شود.

نشان دهید که دو ساختارِ به‌طورجزئی‌ایزومرف، هم‌ارزمقدماتیند، و دو ساختارِشمارای به‌طورجزئی‌ایزومرف، با هم ایزومرفند (برای اطلاع: نیز دو ساختارِ اشباع به طور جزئی ایزومرف و دارای اندازه‌ی برابر با هم ایزومرفند). [۱]

تمرین ۲:

[۱] ادامه‌ی این تمرین را در برگه‌ی تمرینهای جلسه‌ی دوم مشاهده کنید.

۱. کلاسِ $\mathcal{C}$ از L ـ ساختارها را **دارای‌اصلبندی‌متناهی** می‌خوانیم، هرگاه برابر با کلاسِ همه‌ی مدلهای یک تئوریِ متناهی باشد. نشان دهید که $\mathcal{C}$ دارای‌اصلبندی‌متناهی است، اگروتنهااگر هم $\mathcal{C}$ و هم متممِ آن، کلاسهایی مقدماتی باشند.

۲. نشان دهید که تئوری میدانهای دارای مشخصه‌ی صفر، دارای اصلبندی متناهی نیست.

زنجیرهایی از ساختارها، قضیه‌ی تارسکی

تمرین ۳: • فرض کنید $(I,\leq)$ یک ترتیب جزئیِ جهتدار باشد؛ یعنی

$$\forall i,j\in I \quad \exists k\in I \quad i,j\leq k.$$

خانواده‌ی $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ از ساختارها را **جهتدار** می‌خوانیم، هرگاه برای هر $i\leq j$ داشته باشیم $\mathfrak{A}_i\subseteq\mathfrak{A}_j$. نشان دهید که هرگاه $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای جهتدار باشد، آنگاه $A=\bigcup_{i\in I}A_i$ جهانِ زمینه‌ی یک L ـ ساختار است (که به طور یکتا تعیین می‌شود) که همه‌ی $\mathfrak{A}_i$ ها را به عنوان زیرساختار در بر می‌گیرد. این ساختار را با $\mathfrak{A}=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ نشان خواهیم داد.

• خانواده‌ی جهتدارِ $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ را **مقدماتی** می‌خوانیم، هرگاه برای هر $i\leq j$ داشته باشیم $\mathfrak{A}_i\prec\mathfrak{A}_j$. نشان دهید که اجتماع یک خانواده‌ی جهتدارِ مقدماتی، گسترشی است مقدماتی از هر یک از اعضای این خانواده.

تمرین ۴: نشان دهید که کلاسِ گرافهای همبند، مقدماتی نیست. (منظور از گراف، زوجی چون (V,R) است که در آن V یک مجموعه و R رابطه‌ای است دوتاییِ تقارنی و غیرانعکاسی. چنین گراف را همبند می‌خوانیم هرگاه برای هر $x,y\in V$ یک دنباله‌ی $x_۰=x,\ldots,x_n=y$ به گونه‌ای موجود باشد که $(x_{i-۱},x_i)\in R$، برای $i=۱,\ldots,n$.)

آنالیز نااستاندارد

تمرین ۵: ساختارِ $\mathfrak{A}=(\mathbb{R},۰,<,f^{\mathfrak{A}})$ را در نظر بگیرید، که در آن f تابعی است تک‌متغیره. عنصرِ $x\in\mathfrak{A}^*\succ\mathfrak{A}$ را بی‌نهایت‌کوچک می‌خوانیم هرگاه $-\frac{۱}{n}<x<\frac{۱}{n}$، برای هر عدد طبیعیِ n. نشان دهید، هرگاه $f^{\mathfrak{A}}(۰)=۰$، آنگاه $f^{\mathfrak{A}}$ در نقطه‌ی ۰ پیوسته است اگروتنهااگر در هر توسیعِ مقدماتیِ $\mathfrak{A}^*\succ\mathfrak{A}$، تابع $f^{\mathfrak{A}^*}$ بی‌نهایت‌کوچکها را به بی‌نهایت‌کوچکها ببرد.

تمرین ۶: نشان دهید که روی هر گروه آبلی $(G,+)$ می‌توان یک ترتیب خطی تعریف کرد (که البته حافظ جمع است، یعنی هرگاه $a<b, c\leq d$ آنگاه $a+c<b+d$).

رابطه‌ی فشردگی نظریه‌ی مدلی با فشردگی توپولوژیک

تمرین ۷: برای یک زبان ثابتِ L مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$S_{\circ} = \{\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) | \text{است} \ \text{ساختار} - L \ \text{یک} \ \mathfrak{A}\}.$$

مجموعه‌های $[\phi] = \{\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) | \mathfrak{A} \models \phi\}$ تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $S_{\circ}$ می‌دهند. توجیهی بیاورید که چرا لم فشردگی، معادل فشردگیِ $S_{\circ}$ است.